LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: HANNACHI SALAH
« 4$^{\text{éme}}$ Sciences experimentales »

SERIE D'EXERCICES N°5
Dérivabilité d'une fonction

EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x\in[0,1] \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative .

1) a) Etudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.
b) Montrer que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1.
b) Interpréter géométriquement les résultats trouvés en 3.a).

4) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

5) Soit $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.
a) Montrer que h est dérivable sur $]0, 1[$.
b) Dresser le tableau de variation de h.

EXERCICE 2 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée f' varie comme l'indique le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-1 ↗	2	↘ 0

<u>Répondre par **vrai** ou **faux**</u>

1. La courbe de f admet deux tangentes horizontales.
2. Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe de f.
3. Pour tous réels a et b , on a $|f(a)-f(b)|\leq 2|a-b|$.
4. Si $f'(0)=f(0)=1$ alors $(f\circ f)'(0)=2$.

EXERCICE 3 :

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe C_f

c) En déduire que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1<\alpha<\sqrt{2}$

3) Montrer que $\forall\, x \in [1, +\infty[$, on a : $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

4) Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout n ∈IN, on a : $u_n \geq 1$.

b) Montrer que pour tout n ∈IN, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que pour tout n ∈IN, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 4 :

I/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 4x^3 + 3x - 1$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction g
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR et que $0 < \alpha < 1$
3) En déduire le tableau de signe de g(x) pour tout x∈IR.

II/ On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$ On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \frac{x.g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
2) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

III/ Soit la fonction h définie sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ par $h(x) = \frac{1}{\cos x}$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction h.
2) Montrer que la fonction fo h est dérivable sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ et calculer $(f\text{o}h)'(x)$ pour tout x∈$]\frac{\pi}{2}, \pi]$.
3) Etablir le tableau de variation de la fonction fo h sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

EXERCICE 5 :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 1}$

1) *En appliquant les inégalité des accroissements finis ,montrer que*

$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$

2)a) *Interpreter graphiquement ce résultat.*

b) *Déduire un encadrement de $\sqrt{1.1}$ d'amplitude 10^{-2}*

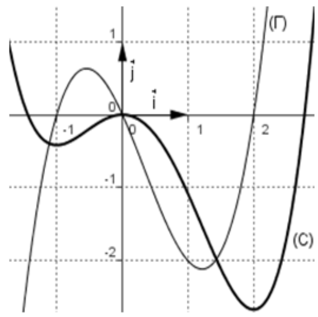
3)*Soit g une fonction définie par $g(x) = tg(x)$.*

Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $x \leq g(x) \leq 2x$

EXERCICE N6 :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans le graphique ci-contre, (C) et (Γ) représentent respectivement deux fonctions f et g définies et dérivables sur IR. Alors :

☐ f est la dérivée de g ☐ g est la dérivée de f

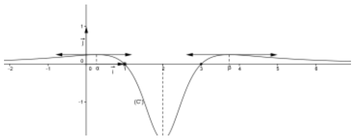


EXERCICE 5 :

Le graphique ci-contre représente la courbe (C') de f' la dérivée de la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = \frac{(x+b)^2}{x^2-4x+5}$ où b est un réel.

• L'axe des abscisses est une asymptote à (C') au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$ qui la coupe en exactement deux points.



• La courbe (C') admet exactement trois tangentes horizontales aux points d'abscisses α, 2 et β.

1) Par une lecture graphique :

a) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

c) Dresser le tableau de signe de $f''(x)$ pour tout $x \in$ IR. Que peut-on déduire?

2) a) Calculer $f'(x)$ à l'aide de b et x.

b) En se servant de la valeur graphique de $f'(2)$, montrer que b=-3

3) Montrer que le point I(2,1) est un centre de symétrie de la courbe (C).

4) a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point I.

b) Vérifier que $f(x)+2x-5 = \frac{2(x-2)^3}{x^2-4x+5}$

c) En déduire la position relative de la courbe (C) et la tangente T.

