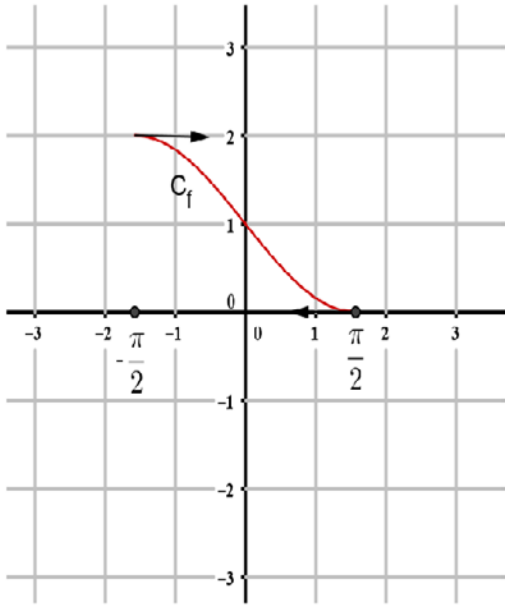
L.Nasrallah **2016/2017**	**SERIE REVISION(syn1)** **Mathématiques**	**Classe :** 4^{eme} Sc **Prof :**Ben Taieb Lotfi

Exercice 1(4points)



Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par f(x) = 1- sinx

et C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1/ Montrer que admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I due l'on précisera

2/ Tracer C' la courbe de f^{-1}

3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur]0,2[et calculer $(f^{-1})'(x)$

Exercice 2 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = 1 + 2i$ $Z_B = 1 + \sqrt{3} + i$, $Z_C = 1 + \sqrt{3} - i$ et , $Z_D = 1-2i$

1 . a. Montrer que $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$

b. Montrer que les points A,B,C et D appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$

c Placer , dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et D et construire les points B et C

d . Montrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - 2(1+2\cos\theta) Z + 5 + 4\cos\theta = 0$ où θ est un réel de $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

a. Résoudre l'équation (E)

On notera Z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et Z_2 l' autre solution

b. Montrer que les points M_1 et M_2 images respectives de Z_1 et Z_2 appartiennent à $\mathcal{C}$

c. Montrer que $AM_1 = 2\sqrt{2 - 2\sin\theta}$ et $M_1M_2 = 4\sin\theta$

d. Déterminer θ tel que les points A, B, C, D, M1 et M2 soient les sommes d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$

Exercice 3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$
   Dresser le tableau de variation de f
2) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 < U_n \leq 1$
   b. Etudier la monotonie de U en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite
3) On pose pour tout entier n, $S_n = \sum_0^n (-1)^k U_k$
   a. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $S_{2n+1} < S_{2n}$
   b. Etudier la monotonie de chacune des suites S_{2n+1} et S_{2n}
   c. En déduire que les suites S_{2n+1} et S_{2n} convergent vers la même limite L et que $2-\sqrt{2} \leq L \leq 1$

Exercice 4

Soit f la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

(C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o,, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

1)a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat trouvé

b) Monter que f dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)^3}}$

c) Dresser alors le tableau de variation de f et tracer (C)

d) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

2) a) Montrer que la droite d'équation x = 2 est une asymptote à $C_{f^{-1}}$ puis tracer $C_{f^{-1}}$

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

3) a) Vérifier que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $f'(x) \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}$

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique $\propto$ et que $\propto \in]1,2[$.

4) Soit la suite U_n définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \ ; \ n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \propto| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} |U_n - \propto|$

c) En déduire la limite de la suite (U_n) et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$