Lycée Nasrallah	2016/2012017
PROF : BenTaiebLotfi	**Série Révision MATHEMATIQUES**

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur [0, 1] par f(x) = $\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

1/a. Dresser le tableau de variation de f

b. Déterminer f([0, 1])

2/a. Montrer que pour tout x de [0, 1] on a $|f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$

b. Montrer que l'équation f(x) = x admet dans [0, 1] une unique solution α

c. Montrer que pour tout x de [0, 1] on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{\pi}{4}|x - \alpha|$

3/ Soit U la suite définie sur ℕ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de ℕ

a. Montrer que pour tout n de ℕ, $0 \leq U_n \leq 1$

b. Montrer que pour tout n de ℕ, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4}|U_n - \alpha|$

c. Déduire que pour tout n de ℕ, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{\pi}{4})^n$

d. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 2

Soit E l'équation dans ℂ : $z^2 - (2\cos\theta + i)z + 1\, ie^{i\theta} = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

1/a. Vérifier que z' = $e^{i\theta}$ est une solution de E

b. Déterminer alors l'autre solution z'' de E

2/ On donne les points A, B et C d'affixes a = $\frac{i}{2}$, b = $e^{i\theta}$ et c = i + $e^{-i\theta}$

a. Vérifier que c - a = $\overline{b - a}$
b. En déduire que C est le symétrique de B par rapport à la droite Δ: y = $\frac{1}{2}$
c. Montrer que BC = $|1 - 2\sin\theta|$, en déduire les valeurs de $\sin\theta$ pour le quelle le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$). On considère les nombres complexes

a = $\sqrt{3}$ + i et b = 1 - i $\sqrt{3}$

1/ Mettre a et b sous forme exponentielle

2/a. Placer les points A, B et C d'affixes a, b et c = a + $\overline{b}$

b. Vérifier que c = $(\sqrt{6} + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$

www.devoirat.net 2016

3/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation E : $z^2 + 2z - 2c = 0$

a. Vérifier que a est une solution de E

b. On désigne par d la deuxième solution de E, montrer que $d = (\sqrt{6} + \sqrt{2})e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

c. Construire le point D d'affixe d.

EXERCICE 4

On considère la suite U définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4-U_n^2}}$

1/a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq \sqrt{2}$

b. Etudier la monotonie de la suite U

c. En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite

2/ Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n^2}{2-U_n^2}$

a. Montrer que V est une suite arithmétique dont on précisera le 1^er terme et la raison

b. Exprimer U en fonction de n. Retrouver ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3/ Soit n de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{U_k^2}$

Donner l'expression de S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$

www.devoirat.net 2016