Lycée Bachir Sfar Amdoun — Devoir de contrôle N°1 — Mr Ghomriani Béchir

Durée :2h — $4^{\text{ème}}$ M

2016-2017

Exercice N°1 : (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$,on désigne par $A\,et\,B$ les points d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=-1$.

On considère l'application f qui à tout point M de $P\setminus\{B\}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z-1}{z+1}$

1. Déterminer les points invariants de f
2.
   a. Vérifier que $(z'-1)(z+1)=-2$ pour tout $z\neq-1$

   b. En déduire que : $AM'\times BM=2$ $\quad et\ que\quad$ $\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{AM'}}\right)+\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{BM}}\right)\equiv\pi\,[2\pi]$
3. Montrer que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 2 alors M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1
4. Soit K le point d'affixe $z_K=-2+i\sqrt{3}$ et K' l'image de K par f

   a. Déterminer la forme exponentielle de z_K+1 .déduire que $K\in\zeta_{(B,2)}$ puis placer le point K

   b. Soit Q le point d'affixe $z_Q=-\overline{z_K}$

   Montrer que $Aff\left(\overrightarrow{AK'}\right)=-\,e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ et que $Aff\left(\overrightarrow{AQ}\right)=-2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

   c. En utilisant les questions précédentes proposer une construction de K' image de K par f

Exercice N°2: (6 points)

Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=\sqrt{3U_n+4}\quad ;n\in IN\end{cases}$

1.
   a. Montrer que $0\leq U_n<4$ $\quad pour\ tout\quad n\in IN$

   b. Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante

   c. En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2. On donne le tableau de variation de la fonction g définie sur $[0,4]$ par $g(x)=\dfrac{3}{4+\sqrt{3x+4}}$

x	0		4
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{8}$

a. Montrer que $4-U_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(4-U_n)$ $\quad pour\ tout\ n\in IN$

b. Déduire que pour tout $n\in IN$ on a : $4-U_n\leq4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3. On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a. Montrer que la suite (S_n) est croissante

b. Montrer par l'absurde que (S_n) n'est pas majorée.

c. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$

4.

a. Montrer que $S_n \geq 4n - 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ (On pourra utiliser le résultat de la question 2.b.)

b. Retrouver $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice N°3 : (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2e^{i\theta}z + 2e^{2i\theta} = 0$; θ *un réel de* $[0,\pi]$

2. Mettre les solutions sous la forme exponentielle

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$,on désigne par M *et* N les points d'affixes respectives $z_M = (1-i)e^{i\theta}$ *et* $z_N = (1+i)e^{i\theta}$.

Montrer que OMN est un triangle rectangle et isocèle en O

4.

a. Montrer que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{MN}}) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b. Déterminer θ pour que la droite (MN) soit parallèle à la droite $\Delta:"y = x"$

Exercice N°4 : (5 points)

Dans la figure ci-dessous ζ_f est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ .La droite $(D): y = x+1$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $+\infty$ et que ζ_f admet une branche parabolique de direction celle de (OI) au voisinage de $-\infty$

1. Par lecture graphique

a. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$

b. $\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)}{x+1}$ et $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-3}{x-1}$

c. Dresser le tableau de variation de f

2. Soit h la fonction définie par : $h(x) = (f\circ f)(x)$ .On note ζ_h la courbe de la fonction h

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h

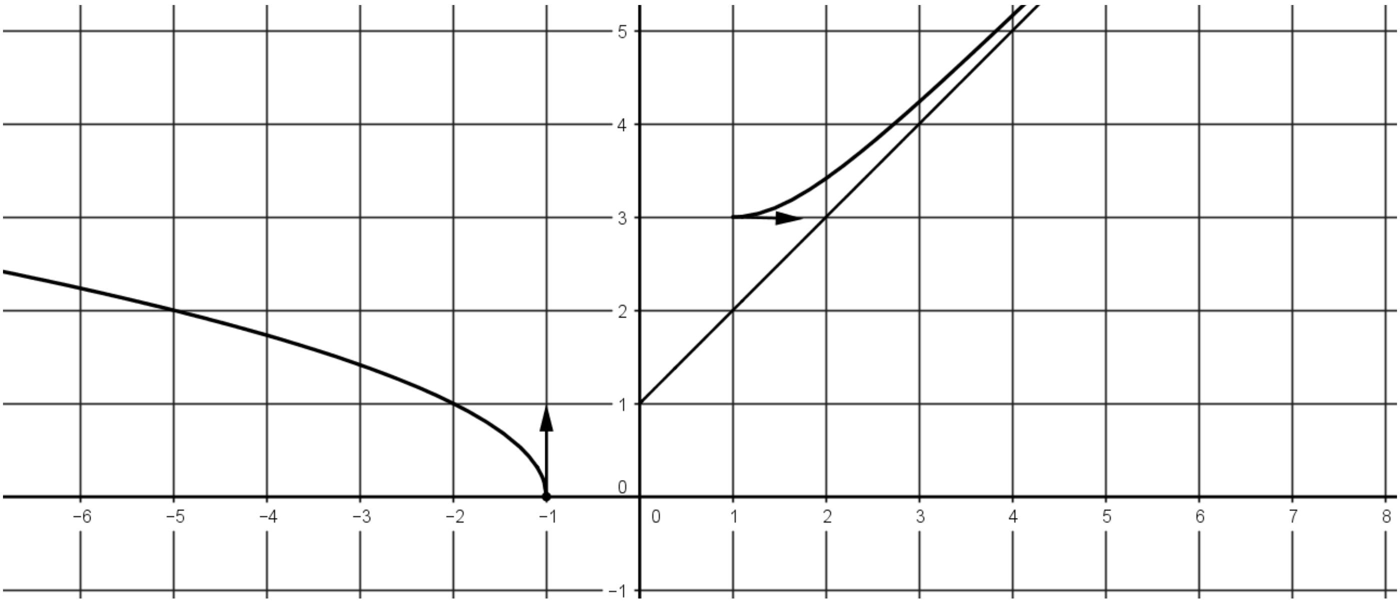
b. Montrer que $\Delta:"y = x+2"$ est une asymptote à ζ_h au voisinage de $+\infty$

c. Préciser la branche infinie de ζ_h au voisinage de $-\infty$

3. Soit n un entier naturel non nul

a. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique $V_n \in]-2,-1[$

b. Montrer que la suite (V_n) est croissante puis qu'elle est convergente vers -1


−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
5
4
3
2
1
0
−1