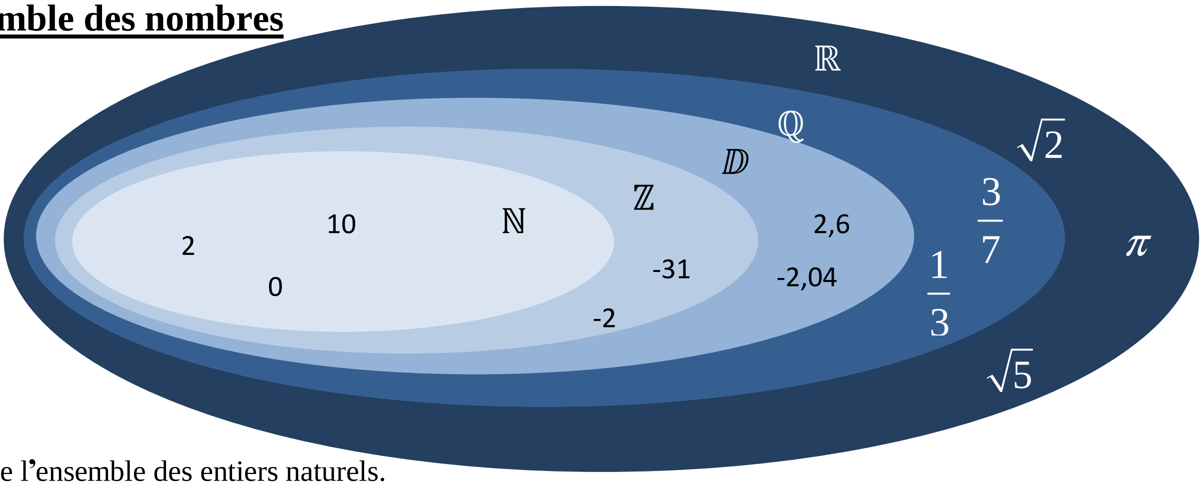
I) Les ensemble des nombres



IN désigne l'ensemble des entiers naturels.
Z désigne l'ensemble des entiers relatifs.
ID désigne l'ensemble des décimaux.
Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.
IR désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice :

1) Ecrire si c'est possible les réels ci-dessous sous la forme : a.10^n (avec a ∈**Z** et n ∈**Z**).

13 ; -30,0363636 ; $\frac{18}{32}$; $\sqrt{625}$; $\frac{3,195}{35,5} \times 100$; $\frac{-893}{95}$ et $\frac{18}{13}$

2) Déterminer les ensembles suivants :**IN**∩**Q** ; **IN** ∪ **IR** ; **Q** ∩ $\mathbf{Z}_+$; **IR**∩$\mathbf{ID}_-$; **ID** ∪**Z** ; **Z**∪**Q** ;

IR∩**ID** ; $\mathbf{Z}_+$∩$\mathbf{IR}_-$

II) Calculs sur les quotients

Soient x, y, z et t des réels non nuls : $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{xt+yz}{yt}$; $\frac{x}{y} \times \frac{z}{t} = \frac{xz}{yt}$; $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{t}} = \frac{xt}{yz}$

Exercice :

1) Pour tout $x \in$ IR { -1 ; 0}, vérifier que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

2) Calculer donc les sommes S_1 et S_2 avec $S_1 = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6}$ et

$S_2 = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ (n∈ IN^*).

III) Règles de calcul sur les puissances

Retenir

Par convention $x^0 = 1$ pour tout réel x non nul
$x^1 = x$;
Et pour tout entier n; m *et* p : $x^n.x^p = x^{n+P}$;
$\frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$ avec $x \neq 0$;
$(x^n)^p = x^{np}$ $(xy)^n = x^n y^n$
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ avec $y \neq 0$

Exercice n°1:

Calculer A et B avec $A = \dfrac{6^{-3}+6^{-3}+6^{-3}+6^{-3}}{3^{-3}+3^{-3}+3^{-3}+3^{-3}}$; et $B = \dfrac{12^5-6^{10}}{6^4(2^5-6^5)}$

Exercice n°2:

Soit a un réel différent de 1.

1) Développer $(1-a)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)$.

2) En déduire la valeur du réel $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$.

IV) Les identités remarquables

Activité compléter

LES IDENTITES REMARQUABLES
$(a+b)^2 =$ ……….
$(a-b)^2 =$ …………………………………………………………..
$a^2-b^2 =$ …………………………………………………………..
$(a+b)^3 =$ …………………………………………………………..
$(a-b)^3 =$ …………………………………………………………..
$a^3+b^3 =$ …………………………………………………………..
$a^3-b^3 =$ …………………………………………………………..

Retenir

Soit a, b et c trois réels, on a les identités remarquables suivantes :

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2)+6abc$.

Exercice n°1

1) On considère les deux réels : $A = 17^6-1$ et $B = 17^6+17^4-2$.

   a) Factoriser A puis en déduire une factorisation de B.

   b) Montrer alors que A et B sont divisibles par 144.

2) Soit a un réel.

   a) Développer $[a+\frac{1}{2}]^2+\frac{3}{4}$.

   b) En déduire que (a^3-1) et $(a-1)$ sont de même signe.

   c) Les réels (a^2-1) et $(a-1)$ sont-ils de même signe ?

Exercice n°2 **Factorisation**

Factoriser les expressions suivantes : $F = (2a+3b)^3-(2a-3b)^3$; $G = a^2b^2-a^2-b^2+1$.

V) Comparaison de réels - Encadrement

1) Ordre et comparaison

Pour tout réel a, b, c et d on a : $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.
$a < b$ (si $c > 0$ alors $a.c < b.c$) et (si $c < 0$ alors $a.c > b.c$).
$a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.
Si a, b, c et d sont des réels positifs et tel qu'on a $a < b$ et $c < d$ alors $a.c < b$.d.
$a < b$ équivaut à ($b - a$) est strictement positif $(0 < b - a)$.
$a > b$ équivaut à ($b - a$) est strictement négatif $(0 > b - a)$.

Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2) Comparaison de a ; $a^2\sqrt{a}$

Soit a un réel
Si $a \geq 1$ alors on a : $a^2 \geq a$; $a \geq \sqrt{a}$.
Si $0 \leq a \leq 1$ alors on a : $a^2 \leq a$; $a \leq \sqrt{a}$.
Si $a \leq -1$ alors on a : $a^2 \geq a$.
Si $-1 \leq a \leq 0$ alors on a : $a^2 \leq a$.

3) Comparaison de a et $\frac{1}{a}$

Soit a un réel non nul
Si $a \geq 1$; alors on a : $a \geq \frac{1}{a}$; Si $a \leq -1$; alors on a : $a \leq \frac{1}{a}$
Si $0 < a \leq 1$; alors on a : $a \leq \frac{1}{a}$; Si $-1 \leq a < 0$; alors on a : $a \geq \frac{1}{a}$

4) Encadrement, intervalles de IR

Soient a; b; *et* x trois réels
Si $a < x < b$ alors on dit que x appartient à l'intervalle ouvert $]a\,;b[$ $x \in]a\,;b[$.
Si $a \leq x \leq b$ alors on dit que x appartient à l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $x \in [a\,;b]$.
Si $x > a$ alors on dit que x appartient à l'intervalle $]a\,;+\infty[$.
Si $x \leq a$ alors on dit que x appartient à l'intervalle $]-\infty\,;a]$.
L'ensemble des réels positifs est l'intervalle $[0\,;+\infty[$ on le note IR_+
L'ensemble des réels strictement positifs est l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on le note IR_+^*.

Exercice n°1

1) Soit a un réel tel que $-2 \leq a \leq 3$ déterminer :

a) un encadrement de $(-3a + 5)$ b) un encadrement de $\frac{2a+3}{-a+5}$

2) Soient a et b deux réels de IR_+^*, montrer les deux inégalités : $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exercice n°2

Soient A = $(1+x)^2$ et B = $1 + 2x$.

1. Comparer A et B.
2. Lequel est plus grand : $a = (1{,}00000000000003)^2$ ou $b = 1{,}00000000000006$.

Exercice n° 3

1. Soit x un réel comparer $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ et $\frac{1}{1+x^2}$

2. Soit x un réel un réel strictement positif montrer l'inégalité suivante $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

VI) Les radicaux

Soit a un réel positif ou nul, on appelle racine carrée de a le seul nombre positif dont le carré est égal à a. La racine carrée de a est notée $\sqrt{a}$. On donne $\sqrt{0}=0$.Si a est positif alors on a $\sqrt{a^2}=a$. Si a est négatif alors on a $\sqrt{a^2}=|a|$.Soit x et y deux réels strictement positifs $\sqrt{x}\times\sqrt{y}=\sqrt{x\times y}$ et $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Remarque : $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ s'appelle **l'expression conjuguée** de $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

Exercice n°1 :

1) Déterminer le réel a dans l'expression suivante : $\sqrt{7+\sqrt{a}}=3$.

2) Ecrire le nombre suivant sans radicaux au dénominateur : $A=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Exercice n°2

Soient $M=\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ et $N=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

1) Calculer M^2 et N^2. En déduire une écriture plus simple de chacun des réels M et N.

2) Soit $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vérifier que $a^2+a-1=0$ et que $\frac{1}{a}=a+1$.

3) Montrer alors que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}}=\sqrt{5}$.

VII) Valeur absolue

Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x (notée $|x|$) est définie par:

$|x|=x$, si $x>0$; $|x|=-x$, si $x<0$; $|x|=0$, si $x=0$.

Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel y on a :

$|x|.|y|=|x.y|$; pour $y\neq 0$ $\frac{|x|}{|y|}=\left|\frac{x}{y}\right|$; $|x+y|\leq|x|+|y|$;$|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$.

$|x|\leq a$ signifie $-a\leq x\leq a$;$|x|\geq a$ signifie ($x\leq -a$ ou $x\geq a$) où a est strictement positif.

Exercice n° 1

Déterminer x dans chacun des cas suivants :$|2x-3|=0$;$|3x+\sqrt{2}|=|x-0,5|$; $|1-x||1+x|=9$.

Exercice n° 2

Soit O et I points d'une droite D. Sur D on considère les points A, B, et M d'abscisses respectives 2 ; -3 et x dans le repère (O, I).

1) Déterminer l'ensemble des points M de la droite D tel que : $|x-2|+|x+3|=5$.

2) Existe-t-il des points du segment [AB] vérifiant $|x-2|+|x+3|=6$?

3)

VIII)Proportionnalité et pourcentage

Proportionnalité

Définition

Une proportion est une égalité de deux rapports. Soient a, b, c et d des réels non nuls.

∗ a et c sont respectivement proportionnels à b et d si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

L'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ s'appelle une **proportion.**

∗ Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{bd}$ (avec $b + d \neq 0$).

∗ Si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ alors $\frac{x+y+z}{a+b+c} = k$ (avec $a + b + c \neq 0$).

∗ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

1- Pourcentage

Situation	***Application linéaire associée à x***	***Exemple - clé***
Prendre t % d'une quantité x	$x \rightarrow \frac{t}{100}\, x$	12 % de x c'est 0,12 × x
Augmenter une quantité x de t %	$x \rightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right) x$	Si x augmente de 12% , alors x devient 1,12 × x
Diminuer une quantité x de t %	$x \rightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right) x$	Si x diminue de 12% , alors x devient 0,88 × x

Exercice

1) Le prix d'un C.D baisse de 8 % la première année, puis de 6% la seconde. De quel pourcentage aura baissé le prix de ce C.D en deux ans ?
2) Un objet coûte 120 D.T.déterminer son prix final après une baisse de 10 % puis une hausse de 8 % .

IX) Ordre de grandeur – Valeurs approchées

1- Valeurs approchées

Exemple : A l'aide d'une calculatrice on a $\sqrt{7}$ = 2,645751311…….2,645 ≤ $\sqrt{7}$ ≤ 2,646

$\sqrt{7}$ - 2,645 = 0,000751311…..…et $\sqrt{7}$ - 2,646 = - 0,000248688……..

On dit alors que 2,645est **une valeur approchée** de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près car $|\sqrt{7} - 2{,}645| < 10^{-3}$.

$\sqrt{7} \geq 2{,}645$ donc 2,645 est une **valeur approchée par défaut** de $\sqrt{7}$ à 10^{-3}.

$\sqrt{7} \leq 2{,}646$ donc 2,646 est une **valeur approchée par excès** de $\sqrt{7}$ à 10^{-3}.

Définition :

Soit n un entier. On dit que le nombre décimal a est une **valeur approchée** à 10^n près du réel b si $|b - a| \leq 10^n$.

Si $a < b$, on dit que a est une **valeur approchée de b à 10^n près par défaut.**

Si $a > b$, on dit que a est une **valeur approchée de b à 10^n près par excès.**

Remarque

Lorsque $m \times 10^{-p} \leq a \leq (m+1) \times 10^{-p}$ on dit que $m \times 10^{-p}$ est l'approximation décimale de a par défaut à 10^{-p} près et $(m+1) \times 10^{-p}$ est l'approximation décimale de a par excès à 10^{-p} près.

2- Arrondi

Arrondir, par exemple, un nombre à 10^{-1} près c'est prendre la valeur approchée de ce nombre à 10^{-1}près :

$*$ Par défaut : si le chiffre des centaines est 0, 1 ; 2 ; 3 ; ou 4.

$*$ Par excès : si le chiffre des centaines est 5, 6 ; 7 ; 8 ; 9.

3- Ecriture scientifique

Exemples

Réel	3,245	-773,24	0,00251	954000
Ecriture scientifique	3,245	-7,7324 $\times 10^{2}$	2,51 $\times 10^{-3}$	9,54 $\times 10^{5}$

La notation scientifique d'un décimal est de la forme

$\mathbf{d \times 10^{n}}$ → entier relatif **($\boldsymbol{n} \in$ Z)**

→ Décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule

4- Ordre de grandeur d'un nombre

Exemple

x = 2867,5 ; **l'ordre de grandeu**r de x est 3×10^{3} $(car\ sa\ notation\ scientifique\ est\ 2{,}8675 \times 10^{3})$.

Définition :

> Si $d \times 10^{n}$(**$\boldsymbol{n} \in$ Z)** est l'écriture scientifique d'un nombre (d : décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule), **l'ordre de grandeur** de ce nombre est $a \times 10^{n}$ où a est **l'arrondi** de d à l'unité.