Résumé : *Produit scalaire – Produit vectoriel dans l'espace*
Niveau : *Bac sciences expérimentales*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Définition : *"Repère et base de l'espace"*

Soit O un point, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace.

- $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace, lorsque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.
- Le triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Définition : *"Coordonnées d'un point – Coordonnées d'un vecteur"*

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace.

- Pour tout point M, il existe trois réels x, y et z tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

  x, y et z sont **les coordonnées de M** dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

  x est **l'abscisse**, y est **l'ordonnée** et z est le **cote** du point M. On note : $M(x,y,z)$.
- Tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire : $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ où a, b et c sont des réels.

  a, b et c sont **les coordonnées de $\vec{u}$** dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note : $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Propriétés :

Soient $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\\ z_B - z_A\end{pmatrix}$
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Si le repère est orthonormé, alors : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Définition : *"Vecteurs colinéaires"*

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **colinéaires** s'il existe un réel α tel que $\vec{u} = \alpha\,\vec{v}$.

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ de l'espace sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix} = 0$.

Théorème :

Soient A, B et C trois points de l'espace.

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Définition : *"Vecteurs coplanaires"*

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{w}$.

Théorème :

Trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a" \\ b" \\ c" \end{pmatrix}$ de l'espace sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.

Avec : $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b" \\ c' & c" \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & b" \\ c & c" \end{vmatrix} + a"\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$

Théorème :

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Définition : *"Produit scalaire"*

Soit A, B et C trois points de l'espace.

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel défini par :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos B\hat{A}C$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$.

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'epace et tous réels α et β :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Théorème : *"Expression analytique du produit scalaire"*

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un RON de l'espace ξ.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

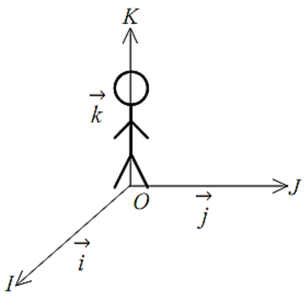
En particulier : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Définition : *"Orientation de l'espace"*

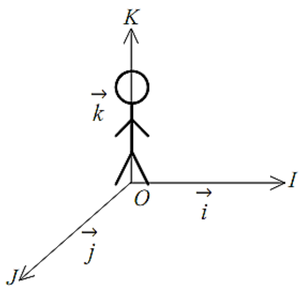
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace.

Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O,\vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I. Si l'observateur a le point J à sa gauche, le repère est dit direct. Il est dit indirect dans le cas contraire.

Repère direct



Repère indirect



- On dit que l'espace est orienté dans le sens direct s'il est muni d'un repère orthonormé direct.
- On dit que l'espace est orienté dans le sens indirect s'il est muni d'un repère orthonormé indirect.

- **On dit que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe, dans le cas où le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct.**
- **On dit que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est indirecte, dans le cas où le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est indirect.**
- **Chaque permutation de deux vecteurs d'une base change l'orientation de cette base.**
- **Chaque permutation circulaire des trois vecteurs conserve l'orientation de la base.**
- **En remplaçant un vecteur d'une base par son opposé, on change l'orientation de cette base.**

Théorème :

Soit $\mathcal{P}$ un plan.

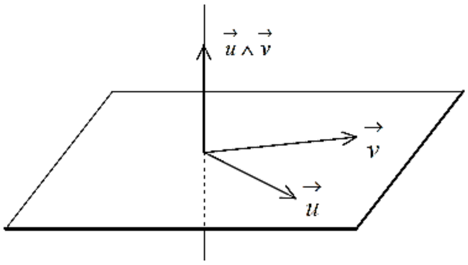
Pour toute base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{P}$ et tout réel $\alpha > 0$, il existe un unique vecteur $\vec{k}$ vérifiant $\|\vec{k}\| = \alpha$, $\vec{k}\cdot\vec{\imath} = \vec{k}\cdot\vec{\jmath} = 0$ et la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est directe.

Définition : *"Produit vectoriel"*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vrctoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'unique vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si non, alors :

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| \end{cases}$$



Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'epace et tous réels α et β :

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$
- $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}) \wedge (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Théorème : *"Expression analytique du produit vectoriel"*

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un ROND de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

Propriété :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un ROND de l'espace.

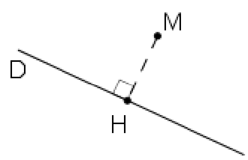
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Définition : *" Distance d'un point à une droite "*

On appelle distance d'un point M à une droite D, la distance MH, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

Cette distance est notée $d(M, D)$.



Théorème : *"Distance d'un point à une droite"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $D(A,\vec{u})$ une droite.

La distance de M à $D(A,\vec{u})$ est le réel positif : $d(A,D) = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Théorème : *"Aire d'un parallélogramme"*

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un ROND de l'espace et $ABCD$ un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$

En particulier, l'aire du triangle ABD est égale à : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$

Théorème : *"Volume d'un parallélépipède"*

L'espace est muni d'un ROND $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélipipède et V son volume. Alors :

$$V = aire\ de\ la\ base \times hauteur = \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AE}\right| = \left|det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\right|$$

Théorème : *"Volume d'un tétraèdre"*

L'espace est muni d'un ROND $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $ABCD$ un tétraèdre, V son volume et h la hauteur issue de A. Alors :

$$V = \frac{1}{3} aire\ de\ la\ base \times hauteur = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$$

$$h = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\|}$$