Lycée Takelsa	Devoir de contrôle N°1	
Prof : Ziadi Mourad		
Classe : 4 ème Math Date : le 02/11/2016	Durée : 2 h	Epreuve : Mathématiques

Exercice N°1 : (03pts)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » **en justifiant la réponse.**

1) Si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes ,alors elles sont bornées.
2) Le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine $2016^{ième}$ de l'unité.
3) Soit $n \in \mathbb{N}$ $et\ n \geq 2$; alors le produit des racines $n^{ième}$ de l'unité est égal à $(-1)^{n-1}$.

Exercice N°2 : (06pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1} \text{....} si.x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)} \text{...} si.x \prec 0 \end{cases}$

On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

 b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .Interpréter géométriquement ce résultat.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + \dfrac{1}{2}x$ puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} fofof(x)$

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

 b) Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$.

6) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & si\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & si\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

 Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice N°3 :(05pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.Soit m un nombre complexe non nul tel que :

$|m| = r > 0$ et $Arg(m) \equiv \frac{\pi}{6}(2\pi)$ .On désigne par M et A les points d'affixes respectives m et 1 **.**

1) Donner la forme exponentielle de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$
2) Déterminer $\boldsymbol{r}$ pour que AM = 1 .
3) Soit l'équation (E_m): $mz^2 - (1+i)z + \frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}} = 0$

   Désignons par M_1 et M_2 les images respectives de z_1 et z_2 les solutions de (E_m).
   a) Sans résoudre(E_m) ; montrer que : $Arg(z_1 + z_2) \equiv \frac{\pi}{12}(2\pi)$
   b) Montrer que : $m\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}}\right) = i$
   c) Résoudre, alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).
   d) Ecrire les solutions de (E_m) sous forme exponentielle.
4) Montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle et isocèle en O.
5) Dans la suite de l'exercice M étant un point de cercle Trigonométrique.
   a) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$. Montrer que : $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \tan(\frac{\theta}{2})$
   b) Résoudre, alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'_m): $m\,(\frac{i-z}{i+z})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\bar{m}}\right)(\frac{i+z}{i-z})^2 = 1+i$

Exercice N°4(06pts)

1) Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

   Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
2) Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n), n \in IN \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \prec U_n \leq 1$
   b) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
3) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\dfrac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}} = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   b)Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

   c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k U_k$; $V_n = S_{2n}$ et $W_n = S_{2n+1}$

   a) Calculer V_0 et W_0 .

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n \prec V_n$

   c) Montrer que la suite (W_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

   d) En déduire que les suites (V_n) et (W_n) sont convergentes vers la même limite L et que $2-\sqrt{2} \leq L \leq 1$.