Exercice 1

On considère la fonction f dont l'image de $x \in \mathbb{R}$ est défini par le polynôme suivant du second degré :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

1. a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

   b. Déterminer le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire le tableau de variations de la fonction f *(on complétera le tableau de variation à l'aide de valeurs approchées).*

3. A l'aide du tableau de variation, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Correction 1

1. a. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

   $$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

   b. Pour déterminer le signe de f', il est nécessaire d'obtenir les racines de ce polynôme du second degré ; son discriminant a pour valeur :

   $$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-4)^2 - 4\times3\times1 = 16 - 12 = 4$$

   On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

   Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; on en déduit qu'elle admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-2}{2\times3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+2}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$$

Le coefficient du terme du second degré est positif ; on en déduit le tableau de signe suivant de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$+$	

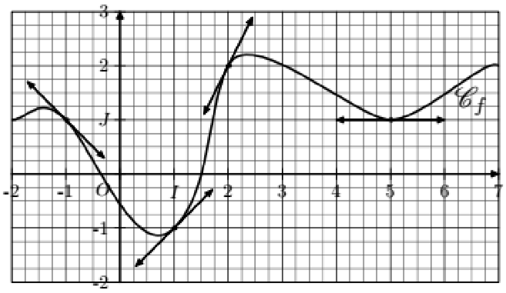
Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-2,85$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variation, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

Exercice 2

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;7]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$, aux points d'abscisses -1, 1, 2, 5 ont été tracées sur la représentation ci-dessus.

1. Déterminer le nombre dérivée de la fonction f en -1 et en 1.

2. Déterminer les équations des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$

Correction 1

1. Graphiquement, on obtient :

- Le nombre dérivée de la fonction f en -1 vaut -1.
- Le nombre dérivée de la fonction f en 1 a pour valeur 1.

2.
- Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
  Graphiquement, on a les valeurs suivantes :
  $f(2)=2 \quad ; \quad f'(2)=2$
  Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour équation réduite :
  $y = f'(2)\cdot(x-2)+f(2)$
  $y = 2\cdot(x-2)+2$
  $y = 2x-4+2$
  $y = 2x-2$
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse est une tangente horizontale passant par le point de coordonnées $(5\,;1)$. On en déduit l'équation réduite de cette tangente :
  $y = 1$

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^4$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

2. On considère la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g.

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.