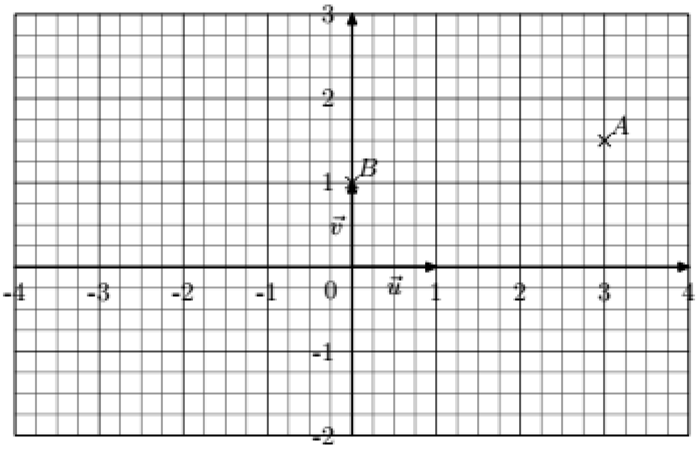
Exercice 1

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ ainsi que les points A et B représentés ci-dessous :



On note z_A et z_B les affixes respectives des points A et B.

1. Donner les écritures algébriques des affixes des points A, B.

2. **a.** Placer le point C d'affixe $-z_A$.

b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en C ?

3. **a.** Placer le point D d'affixe $\overline{z_A}$.

b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en D ?

4. **a.** Placer le point E d'affixe $-\overline{z_A}$.

b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en E ?

5. **a.** Placer le point F d'affixe $\frac{1}{2}\cdot z_A$.

b. Que peut-on dire de la position du point F ?

6. **a.** Placer le point G d'affixe $z_A+(-2-2\cdot i)$.

b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en G ?

7. On considère le point H d'affixe z_H vérifiant l'égalité :

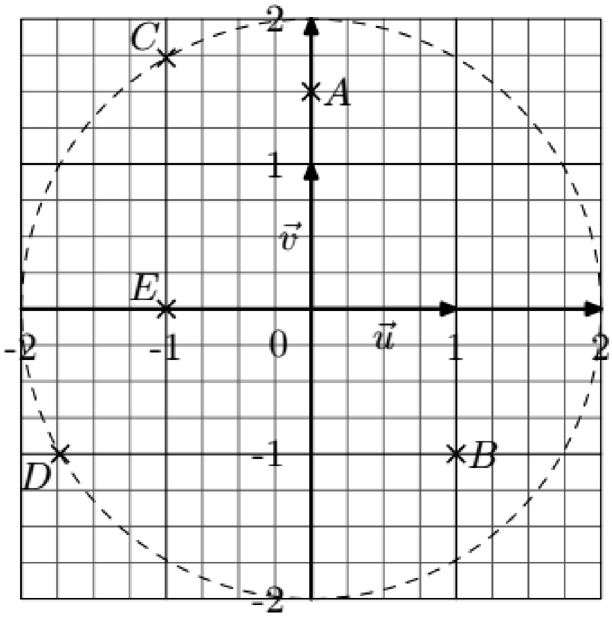
$$z_H - z_B = \frac{1}{2}\cdot(z_A - z_B)$$

a. En résolvant l'équation, déterminer l'écriture algébrique de l'affixe z_H du point H.

Exercice 2

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthormé direct représenté ci-dessous :

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2 est représenté en pointillé ; les points C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.



1. Déterminer les modules et les arguments des affixes des points A, B, C, D et E.

2. Placer les points F et G d'affixes respectives z et z' vérifiant :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} |z'| = 2 \\ \arg(z') = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 3

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\cdot\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E', image de E par f.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a :
$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

b. En déduire une expression de $\dfrac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\dfrac{MB}{MA}$, puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A}\,;\overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

5. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).

b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?