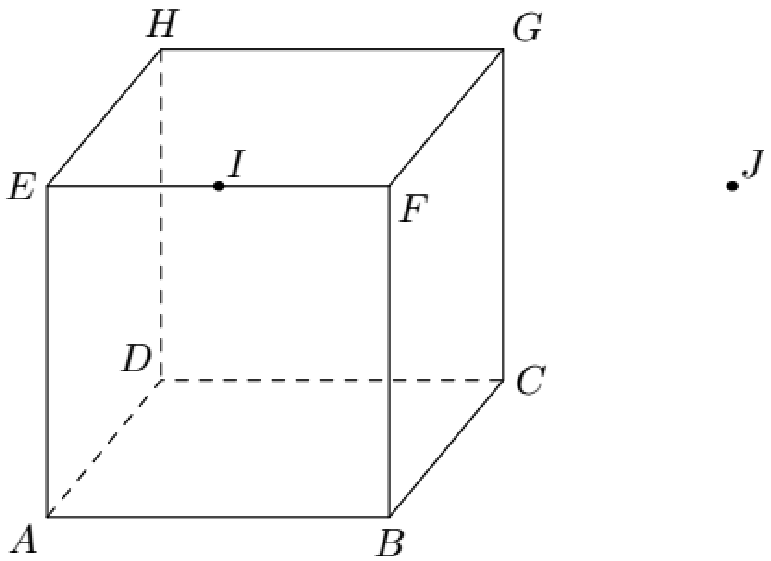
EXERCICE 1

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE})$.

1. a. Déterminer les coordonnées des points I et J.

   b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

   c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

   d. Calculer la distance du point F au plan (BGI). `(hors programme 2012).`

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

   b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face $ADHE$.

   c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.

   d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

EXERCICE 2

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
   a. Donner les coordonnées des points D et F.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point H.
   e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM}=t\cdot\overrightarrow{DF}$.
   On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   a. Démontrer que : $ME^2=\dfrac{3}{2}\cdot t^2-\dfrac{5}{2}\cdot t+\dfrac{5}{4}$
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que : $ME\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si, et seulement si, $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si, et seulement si, ME^2 est minimal.
   d. Conclure.