

Med Migha 97090496	Cours équations seconde degrés	2em
--------------------	--------------------------------	-----

1 La forme canonique du trinôme

1.1 Le trinôme du second degré

Definition 1 : On appelle trinôme du second degré ou simplement trinôme, le polynôme $P(x)$, à coefficients réels, de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0$$

Exemple : Les trois polynômes suivants sont des trinômes

$$P_1(x) = x^2 + 2x - 8$$

$$P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14$$

$$P_3(x) = -x^2 + 4x - 5$$

1.2 Quelques exemples de formes canoniques

La forme canonique d'un trinôme est une forme à partir de laquelle on peut savoir si le trinôme peut se factoriser ou non. Cette forme est obtenue à partir d'une "astuce" qui consiste à rajouter un terme puis à l'ôter de façon à obtenir le début d'un carré parfait.

Exemple : Soit $P_1(x) = x^2 + 2x - 8$

Les deux premiers termes sont $x^2 + 2x$ qui est le début de $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. On ajoute 1 puis on le soustrait, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 8 \\ &= (x + 1)^2 - 9 \quad \text{forme canonique de } P_1(x) \\ &\text{on peut, à partir de cette forme, factoriser. Cela donne :} \\ &= (x + 1)^2 - 3^2 \\ &= (x + 1 - 3)(x + 1 + 3) \\ &= (x - 2)(x + 4) \end{aligned}$$

Exemple : Soit $P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14$

On factorise par le coefficient devant x^2 , c'est à dire ici 2.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7 \right) \\ \left(x^2 + \frac{3}{2}x \right) &\text{ est le début de } \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}. \text{ Cela donne :} \\ &= 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 7 \right) \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} - 7 \right] \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{121}{16} \right] \quad \text{forme canonique de } P_2(x) \end{aligned}$$

Med Migha 97090496	Cours équations seconde degrés	2em
--------------------	--------------------------------	-----

on peut, à partir de cette forme, factoriser. Cela donne :

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{11}{4} \right)^2 \right] \\
 &= 2 \left(x + \frac{3}{4} - \frac{11}{4} \right) \left(x + \frac{3}{4} + \frac{11}{4} \right) \\
 &= 2(x-2) \left(x + \frac{7}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Exemple : Soit $P_3(x) = -x^2 + 4x - 5$

On factorise par le coefficient devant x^2 , c'est à dire ici -1 .

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= - (x^2 - 4x + 5) \\
 (x^2 - 4x) &\text{ est le début de } (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4. \text{ Cela donne :} \\
 &= - (x^2 - 4x + 4 - 4 + 5) \\
 &= - [(x-2)^2 - 4 + 5] \\
 &= - [(x-2)^2 + 1] \quad \text{forme canonique de } P_2(x)
 \end{aligned}$$

On ne peut factoriser cette forme car somme de deux carrés

1.3 Forme canonique du trinôme

Soit un trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$

On factorise par $a \neq 0$, cela donne :

$$\begin{aligned}
 P(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 x^2 + \frac{b}{a}x &\text{ est le début de } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}. \text{ Cela donne :} \\
 &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]
 \end{aligned}$$

Théorème 1 : La forme canonique d'un trinôme du second degré est de la forme :

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

⚠ Dans un cas concret, on n'utilise pas cette formule un peu difficile à mémoriser, mais on retient l'astuce qui consiste à ajouter puis soustraire un terme comme nous l'avons vu dans les exemples précédents.

Med Migha 97090496	Cours équations seconde degrés	2em
--------------------	--------------------------------	-----

2 Racines du trinôme

2.1 Définition

Définition 2 : Les racines d'un trinôme ou "zéros" sont les solutions de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Définition 3 : On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant**

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ devient en utilisant la forme canonique :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$

Le nombre de racines du trinôme dépend du signe de Δ , d'où **discriminant**.

2.2 Le discriminant est positif

Comme le discriminant Δ est positif, la forme canonique se factorise en :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$$

On obtient alors deux solutions :

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

Soit, en appelant x_1 et x_2 les deux solutions

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $2x^2 + 3x - 14 = 0$

- On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-14) = 9 + 112 = 121 = 11^2$
- $\Delta > 0$, il existe deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 11}{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 11}{4} = -\frac{7}{2}$$

- On conclut par : $S = \left\{ -\frac{7}{2}; 2 \right\}$

Med Migha 97090496	Cours équations seconde degrés	2em
--------------------	--------------------------------	-----

2.3 Le discriminant est nul

Comme le discriminant Δ est nul, la forme canonique correspond à un carré parfait. Elle se factorise en :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

On obtient alors qu'une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $3x^2 - 18x + 27 = 0$

- On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \times 3 \times 27 = 324 - 324 = 0$
- $\Delta = 0$, il n'existe qu'une seule solution x_0 : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{6} = -3$
- On conclut par : $S = \{-3\}$

2.4 Le discriminant est négatif

Comme le discriminant Δ est négatif la forme canonique ne se factorise pas. Il n'y a donc aucune solution à l'équation du second degré.

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $-x^2 + 4x - 5 = 0$

- On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 16 - 20 = -4$
- $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
- On conclut par : $S = \emptyset$

2.5 Conclusion

Théorème 2 : Le nombre de racines du trinôme du second degré dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ il existe deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ il n'existe qu'une racine (appelée racine double) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ il n'existe aucune racine réelle.

⚠ Lorsque l'on pourra factoriser le trinôme, on ne calculera pas le discriminant. On factorisera, puis on annulera chaque facteur.

Exemple : Déterminer les solutions des équations suivantes :

a) $4x^2 - 25 = 0$

b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

3 Factorisation, somme et produit des racines

3.1 Factorisation du trinôme

Si le discriminant est positif. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$$

En remplaçant par les racines x_1 et x_2 , nous avons alors : $a(x - x_1)(x - x_2)$

De même si le discriminant est nul. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

En remplaçant par la racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$, nous avons alors : $a(x - x_0)^2$

Exemples :

a) Factoriser le trinôme suivant : $P(x) = 2x^2 + 3x - 14$

D'après le paragraphe précédent, les racines de ce trinôme sont : $-\frac{7}{2}$ et 2 ,
donc :

$$P(x) = 2 \left(x + \frac{7}{2} \right) (x - 2)$$

MED MIGHA 5

Med Migha 97090496	Cours équations seconde degrés	2em
--------------------	--------------------------------	-----

Nous retrouvons la factorisation avec la forme canonique.

b) Factoriser le trinôme suivant : $Q(x) = 3x^2 - 18x + 27$

D'après le paragraphe précédent, l'unique racine de ce trinôme est 3, donc :

$$Q(x) = 3(x - 3)^2$$

⚠ La racine $x = 3$ est une racine double car on peut factoriser par $(x - 3)^2$

Théorème 3 : Lorsque le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet :

- deux racines x_1 et x_2 , alors : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- admet une racine x_0 , alors : $P(x) = a(x - x_0)^2$
- n'admet pas de racine, il ne peut pas se factoriser.

3.2 Somme et produit des racines

Soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Nous nous plaçons dans le cas où $\Delta > 0$. Il y a donc deux racines x_1 et x_2 . Le trinôme peut alors se factoriser en :

$$T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Développons le trinôme :

$$T(x) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

On pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$, on a alors : $T(x) = ax^2 - aSx + aP$

En identifiant à : $T(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient alors :

$$-aS = b \Rightarrow S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad aP = c \Rightarrow P = \frac{c}{a}$$

Exemple : Soit le trinôme $T(x) = 2x^2 + 3x - 14$

Nous savons que ce trinôme admet deux solutions $-\frac{7}{2}$ et 2, d'après notre résultat :

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} + 2 = -\frac{-7 + 4}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{14}{2} = -7 \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} \times 2 = -7$$

Théorème 4 : Si un trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines, alors la somme S et le produit P des racines sont égales à :

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}$$

3.3 Application

Parfois, certaines équations admettent des solutions très simples que l'on appelle "*racines évidentes*". Lorsque l'on connaît une telle solution, le produit des racines permet alors de trouver la seconde.

Exemples :

1) Résoudre l'équation : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

- $x_1 = 1$ est racine évidente car $2(1)^2 - 5(1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$
- $P = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{3}{2}$

$$S = \left\{ 1; \frac{3}{2} \right\}$$

2) Résoudre l'équation : $5x^2 + 2x - 3 = 0$

- $x_1 = -1$ est racine évidente car $5(-1)^2 + 2(-1) - 3 = 5 + 2 - 3 = 0$
- $P = \frac{c}{a} = -\frac{3}{5}$ donc $x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{3}{5}$

$$S = \left\{ -1; \frac{3}{5} \right\}$$

4 Signe du trinôme et inéquation du second degré

4.1 Le discriminant est positif

Si $\Delta > 0$, le trinôme se factorise en : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

En supposant que $x_1 \geq x_2$, dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$x - x_1$	-	-	0	+
$x - x_2$	-	0	+	+
$a(x - x_1)(x - x_2)$	signe de a	signe de $-a$	signe de a	

Conclusion : Le signe du trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

Exemple : Signe de $-3x^2 + 7x + 6$

Il n'y a pas de racine immédiate, calculons alors le discriminant :

$$\Delta = 7^2 - 4(-3)(6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

Comme le discriminant est positif, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 - 11}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Comme le coefficient devant x^2 est négatif (-3), le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur.

Nous avons alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	3	$+\infty$
$-3x^2 + 7x + 6$		-	+	-

4.2 Le discriminant est nul ou négatif

Si $\Delta = 0$, le trinôme se factorise en : $P(x) = a(x - x_0)^2$

Comme $(x - x_0)^2$ est un carré, il est soit nul soit positif. Donc le trinôme est soit nul soit du signe de a .

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$a(x - x_0)^2$		signe de a	signe de a

Si le discriminant est négatif, il n'a donc pas de racine. Il possède donc un signe constant. On montre alors qu'il est du signe de a .

4.3 Conclusion

Théorème 5 : Le signe du trinôme dépend du discriminant :

- Si $\Delta > 0$, par rapport aux racines, le trinôme est du signe de a à l'extérieur et du signe de $-a$ à l'intérieur.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme est soit nul, soit du signe de a .
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a .

5 Représentation de la fonction trinôme

Théorème 6 : La représentation de la fonction trinôme f est une parabole \mathcal{P} dont les caractéristiques dépendent du signe du coefficient a et du signe du discriminant Δ .

Les coordonnées du sommet S de la parabole sont : $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Démonstration : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + c$
La forme canonique de la fonction f est donc :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

7 Équation, inéquation se ramenant au second degré

7.1 Équation rationnelle

Soit à résoudre l'équation : $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-5} = \frac{9}{4}$

- On détermine d'abord l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-2; \frac{5}{2}\right\}$
- En multipliant l'équation par le dénominateur commun $4(x+2)(2x-5)$

$$\begin{aligned} x \in D_f, \quad 4(2x-5) - 8(x+2) &= 9(x+2)(2x-5) \\ 8x - 20 - 8x - 16 &= 18x^2 - 45x + 36x - 90 \\ -18x^2 + 9x + 54 &= 0 \\ (\div 9) \quad -2x^2 + x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 2$ racine évidente car $-2 \times 2^2 + 2 + 6 = 0$

Le produit des racines $P = \frac{6}{-2} = -3$ donc on a $x_2 = \frac{P}{x_1} = -\frac{3}{2}$

Comme $2 \in D_f$ et $-\frac{3}{2} \in D_f$, on a alors : $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$

7.2 Inéquation rationnelle

Soit à résoudre l'inéquation : $\frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2} \geq 0$

- On détermine d'abord l'ensemble de définition de l'inéquation :
Il faut déterminer les racines de $x^2 + x - 2 = 0$
 $x_1 = 1$ est racine évidente car $1^2 + 1 - 2 = 0$
Le produit des racines $P = -2$, donc $x_2 = -2$
On conclut que l'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 1\}$
- Racines de $2x^2 + 5x + 3 = 0$
 $x_1 = -1$ est racine évidente car $2 \times (-1)^2 - 5 + 3 = 0$
Le produit des racines $P = \frac{3}{2}$, donc $x_2 = -\frac{3}{2}$
- On remplit un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$
$2x^2 + 5x + 3$	+	+	0	-	0	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	-	-	0
$\frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2}$	+	-	0	+	0	-

La solution est donc : $S =]-\infty; -2[\cup \left[-\frac{3}{2}; -1\right] \cup]1; +\infty[$

Med Migha 97090496	Cours équations seconde degrés	2em
--------------------	--------------------------------	-----

7.3 Équation bicarrée

Définition S : On appelle équation bicarrée, une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

On effectue le changement de variable suivant : $X = x^2$ avec $X \geq 0$

L'équation devient alors : $aX^2 + bX + c = 0$

On résout en X puis on revient à x en résolvant $x^2 = X$

Exemple : Soit à résoudre dans \mathbb{R} , l'équation suivante : $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

On pose $X = x^2$ avec $X \geq 0$, l'équation devient : $X^2 - 5X - 36 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 25 + 4 \times 36 = 169 = 13^2$

Comme $\Delta > 0$, on a deux racines : $X_1 = \frac{5+13}{2} = 9$ et $X_2 = \frac{5-13}{2} = -4$

On ne retient que X_1 , car c'est la seule racine positive.

On revient à x : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

L'ensemble solution est donc : $S = \{-3 ; 3\}$



7.4 Somme et produit de deux inconnues

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

Ce système est symétrique, car on peut intervertir x et y sans que cela ne change le système. Cela veut dire que si le couple (a, b) est solution alors le couple (b, a) l'est également.

Ce système revient à résoudre une équation du second degré où x et y seront les solutions de cette équation. S représente la somme des racines et P leur produit. On doit donc résoudre :

$$X^2 - SX + P = 0$$



Med Migha 97090496	Cours équations seconde degrés	2em
--------------------	--------------------------------	-----

Exemple : Soit à résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$$

x et y sont donc les racines de : $X^2 - 18X + 65 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = 18^2 - 4 \times 65 = 64 = 8^2$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines :

$$X_1 = \frac{18+8}{2} = 13 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{18-8}{2} = 5$$

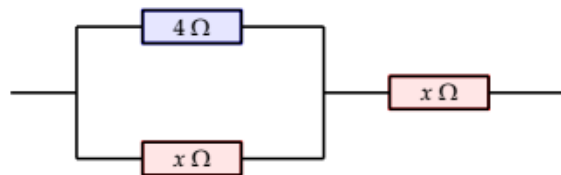
Les solutions du système sont donc : $S = \{(13, 5); (5, 13)\}$

⚠ On pourrait retrouver ce résultat graphiquement par l'intersection de la droite $y = 18 - x$ et de l'hyperbole $y = \frac{65}{x}$

8 Quelques problèmes du second degré

8.1 Problème de résistance équivalente

Dans un circuit électrique, des résistances ont été montées comme l'indique la figure ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance x pour que la résistance équivalente de l'ensemble soit de 6Ω .



On rappelle que la résistance équivalente dans un circuit

- en série est la somme des résistances : $R_{eq} = R_1 + R_2$
- en parallèle est telle que : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Med Migha 97090496	Cours équations seconde degrés	2em
--------------------	--------------------------------	-----

Le circuit est composé de deux parties, une partie en parallèle et l'autre en série.

Dans la partie en parallèle : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{x+4}{4x}$

en prenant l'inverse : $R_{eq} = \frac{4x}{x+4}$

La résistance équivalente de l'ensemble est donc : $\frac{4x}{x+4} + x = 6$

en multipliant par $(x+4)$, on a :

$$4x + x(x+4) = 6(x+4) \Leftrightarrow 4x + x^2 + 4x = 6x + 24 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 4 + 4 \times 24 = 100 = 10^2$

On obtient deux solutions : $x_1 = \frac{-2+10}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-2-10}{2} = -6$

On ne retient que la solution positive. La valeur de la résistance est donc de 4Ω

MED MIGHA 97090496