Série n°1

LIMITES ET CONTINUITE
NOMBRES COMPLEXES

4^e *SC & TECH*

Exercice 1 _ Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x)=\frac{1}{x+3}\ ;\ f_2(x)=\sqrt{3x-5}\ ;\ f_3(x)=\frac{2x-3}{4x+5}\ ;\ f_4(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

$$f_5(x)=\sqrt{\frac{x+7}{-x+16}}\ ;\ f_6(x)=\sqrt{(3x-2)(-2x+4)}\ ;\ f_7(x)=\frac{x^3+x}{x^2-1}\ ;\ f_8(x)=\tan x$$

$$f_9(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}\ ;\ f_{10}(x)=\sqrt{x^2-2x+1}\ ;\ f_{11}(x)=\sqrt{3x^2+x+1}$$

Exercice 2 _ Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Soit la fonction f définie sur IR_+^* par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & si\ x\geq 2\\ \frac{4}{x^2} & si\ 0<x<2\end{cases}$.

   Montrer que f est continue en 2.

2) Soit la fonction h définie par $h(x)=\begin{cases}\frac{-3x+4}{12}x & si\ x<-4\\ \frac{ax}{x-2} & si\ -4\leq x<1\\ bx^2 & si\ \ x\geq 1\end{cases}$

   Déterminer les réels a et b pour que h soit continue en -4 et en 1.

3) on donne $f(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{|x-1|} & si\ x\neq 1\\ 0 & si\ x=1\end{cases}$

   a) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 1.
   b) La fonction f est-elle continue en 1.
   c) La fonction f est-elle continue sur IR

4) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-\frac{1}{x} & si\ x>4\\ (x+k)^2 & si\ x\leq 4\end{cases}$

   Déterminer la(les) valeur(s) du réel k pour que f soit continue sur son domaine de définition.

Exercice 3 _ Calculer les limites suivantes si elles existent.

$$1)\ \lim_{x\mapsto -2}\frac{x^2+x-2}{2x^2+3x-2}\quad 2)\ \lim_{x\mapsto +\infty}\frac{3x^2-x-2}{2x+1+x^2}\quad 3)\ \lim_{x\mapsto 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}{x-1}\quad 4)\ \lim_{x\mapsto 0}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\right)$$

$$5)\ \lim_{x\mapsto +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\quad 6)\ \lim_{x\mapsto 1}\frac{x+2\sqrt{x}}{x-1}\quad 7)\ \lim_{x\mapsto 4}\left(\frac{1}{x^2-16}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\quad 8)\ \lim_{x\mapsto 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$9)\ \lim_{x\mapsto -\infty}\frac{1}{x^2-1}\quad 10)\ \lim_{x\mapsto\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{2x-\sqrt{8}}\quad 11)\ \lim_{x\mapsto -1}(x^2-1)\sqrt{1+\frac{2}{(1+x)^2}}$$

Exercice 4 _ Soit la fonction $f: x\mapsto\frac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}}$

1. Démontrer que f est définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;2[\cup]2;+\infty[$.
2. Déterminer l'expression de f sur son domaine de définition (sans valeur absolue).
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en -3 et déterminer son prolongement.

   Indication : On pourra remarquer que $x+3=-\sqrt{(x+3)^2}\ pour\ x<-3$

Exercice 5 _*Les questions sont indépendantes.*

1) Déterminer la forme cartésienne de chacun des nombres complexes suivants

$$a)\ \frac{3-i}{1+i}\quad ;\quad b)\ \frac{\sqrt{3}-i}{i}\quad ;\ c)\ \frac{(5+2i)(2-3i)}{2i+\sqrt{5}}\quad ;\quad d)\ z=i+\frac{1}{2i}$$

2. a) Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z \neq 1$ et $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

Montrer que $\frac{z'-1}{Z-1}$ est réel

b) Démontrer que $\forall\ z\ et\ z' \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = |z'| = 1$ et $1 + zz' \neq 0$, le nombre complexe

$$\mathcal{Z} = \frac{z+z'}{1+ZZ'} \text{ est réel}$$

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z+2}{Z-i}$ soit réel.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z+1-2i}{Z-i-1}$ soit imaginaire pur.

Exercice 6 _ Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants puis les mettre sous la forme exponentielle :

$$z = \sqrt{3} + i\ ;\ z' = 1 - i\ ;\ \ z" = i\sqrt{3} - 1\ ;\ z^6\ ;\ zz'\ ;\ \overline{z"}\ ;\ \frac{z'}{z"}\ ;\ (\frac{z}{z'})^4$$

Exercice 8 : Choisir la bonne réponse à chacune des questions suivantes

	QUESTIONS	a	b	c
1	La forme algébrique du nombre complexe $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ est	$\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$
2	Un argument du nombre complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)i$ est	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
3	Le module du nombre complexe $1+e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est égal à	1	$\sqrt{2}$	2
4	L'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z-i)(\bar{z}+i)=1$ est	$un\ singleton$	$une\ droite$	$un\ cercle$
5	z vérifie $\bar{z}+\lvert z\rvert = 6+2i$, alors l'écriture algébrique de z est	$-\frac{8}{3}-2i$	$-\frac{8}{3}+2i$	$\frac{8}{3}+2i$
6	$Im(z)$ est	$\frac{z+\bar{z}}{2}$	$\frac{z-\bar{z}}{2i}$	$\frac{z-\bar{z}}{2i}$