

- Aptitudes à développer**
- Etudier une série statistique
 - Déterminer la moyenne, la médiane et le mode
 - Chercher l'effectif et les fréquences cumulées croissantes
 - Représenter la série par un diagramme en bâtons et interpréter les résultats

I) Introduction

La statistique est une science d'observation qui, en classant des données, décrit des phénomènes (des événements) au moyen d'un certain nombre de valeurs numériques.

• **Population** : c'est l'ensemble étudié, ses éléments sont appelés des individus. Exemple : si l'étude statistique porte sur les élèves d'un lycée, la population est alors l'ensemble des élèves du lycée et les individus sont les élèves.

• **Individu** : c'est un élément de la population.

• **Effectif total** : c'est le nombre total d'individus.

• **Caractère** : c'est la propriété étudiée. On distingue.

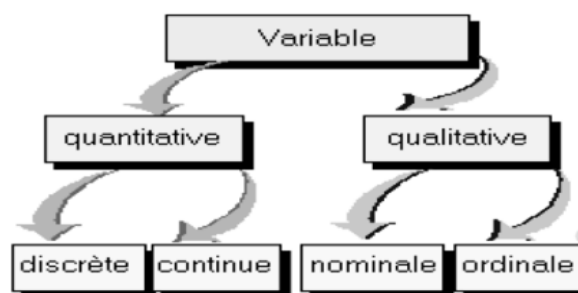
1) **Caractère quantitatif** : (s'il prend des valeurs numériques). Il exprime une quantité

a) **Caractère quantitatif discret** (ex. : notes ; nombre d'enfants ; nombres de maisons..).

b) **Caractère quantitatif continu** (ex. : longueurs des barres ; intervalles de temps.....)

2) **Caractère qualitatif** : (s'il ne prend pas de valeurs numériques). Il exprime une qualité (ex : couleurs de roses ; sports préférée des élèves).

Un caractère quantitatif discontinu	il prend des valeurs isolées
Un caractère quantitatif continu	il prend toutes les valeurs de l'intervalle
Un caractère qualitatif	il n'est pas mesurable



II) Le vocabulaire utilisé en statistiques

Caractère d'une population : Le caractère ou variable statistique d'une population est la propriété sur laquelle porte l'étude statistique. Le caractère statistique peut être : **Qualitatif** ou **Quantitatif**.

Exemple1

La série statistique ci dessous donne le nombre de frères et sœurs de 100 personnes.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6 ou plus
Nombre de personnes	10	12	18	15	20	15	10

Le type du caractère étudié dans l'exemple n°1 est

Exemple 2

Une enquête au près d'un groupe de 235 jeunes, portant sur leur sport préféré, a donné les résultats suivants :

Sport	Natation	Course	Foot	Hand-balls	Total
Nombre de jeunes	55	70	80	30

Le type du caractère étudié dans l'exemple n°2 est

2) L'effectif de la population

Une série statistique associée à chaque valeur x_i du caractère le nombre d'individus correspondant, appelé effectif partiel et noté n_i .

3) Classes

Une classe, c'est la portion de l'intervalle auquel appartiennent les valeurs de caractère.

Exercice

Thème de l'enquête : La saison de naissance des élèves d'une classe de 1^{ère} Année.

Population étudiée : Classe de 1^{ère} S

Résultat de l'enquête : Printemps = 7. Été = 8. Automne = 4. Hiver = 6.

Questions : 1° Présenter ces résultats dans le tableau des effectifs ci-dessous:

2° Calculer l'effectif total.

Saisons : x_i
Effectifs : n_i

Remarque : Si le tableau des effectifs est donné, la définition permet toujours de calculer le tableau des fréquences. Inversement, si l'on donne le tableau des fréquences, on peut reconstituer le tableau des effectifs à condition de connaître l'effectif total de la série.

4) Effectif cumulé croissant. Effectif cumulé décroissant

▪ On appelle **effectif cumulé croissant** de la valeur x le nombre d'individus ayant des valeurs du caractère **inférieurs ou égales** à x .

▪ On appelle **effectif cumulé décroissant** de la valeur x le nombre d'individus ayant des valeurs du caractère **supérieures ou égales** à x .

Exemple : On a relevé les vitesses de passage en Km/h de 50 voitures.

Classes	[70 ; 80[[80 ; 90[[90 ; 100[[100 ; 110[[110;120[[120 ; 130[
Effectifs : n_i	2	5	8	20	10	5
Effectifs cumulés croissant	2	2+5=7	7+8=15	15+20=35	35+10=45	45+5=50
Effectifs cumulés décroissant	50	50-2=48	48-5=43	43-8=35	35-20=15	15-10=5

Question : Compléter les phrases :

..... voiture sont passées à une vitesse inférieure ou égale à 110 Km/h.

..... voitures sont passées à une vitesse supérieure ou égale à 110 Km/h.

..... voitures sont passées à 120 Km/h au moins.

5) La fréquence d'une valeur

La fréquence d'une valeur x_i du caractère est le quotient de l'effectif n_i de ce caractère par l'effectif total N : $f_i = \frac{n_i}{N}$

Remarque : La somme des fréquences est égale à 1.

$$P = \frac{n}{N} \times 100$$

6) Le pourcentage

Le pourcentage P d'une classe s'obtient en multipliant sa fréquence f_i par 100 ;

Remarque : La somme des pourcentages est égale à 100.

7) Fréquences cumulées

La fréquence cumulée correspondant à une modalité est la somme de la fréquence correspondant à cette modalité et des fréquences correspondantes à toutes les valeurs précédentes.

Exercice n°1

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'un lycée.

Modalités	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	total
Effectifs : n_i	140	155	104	101	500
Fréquences : f_i
Pourcentage
Fréquences cumulées croissantes

Compléter : des élèves de ce lycée sont en terminale (4^{ème}).

Les élèves de 1^{ère} représentent du nombre total des élèves.

Les élèves de 2^{ème} représentent du nombre total des élèves.

Les élèves de 1^{ère} et de 2^{ème} représentent du nombre total des élèves.

Exercice n°2

Compléter le tableau suivant qui représente la répartition des notes obtenues par 20 élèves (on donnera le résultat pour les fréquences en approchant les valeurs à une décimale par défaut).

Classe des notes	$0 < \text{Note} < 6$	$6 < \text{Note} < 12$	$12 < \text{Note} < 18$
Effectif : n_i	5	8	7
Effectif cumulé croissant			
Fréquence : f_i			
Fréquence : (%)			

III) Représentations graphiques utilisées en statistiques

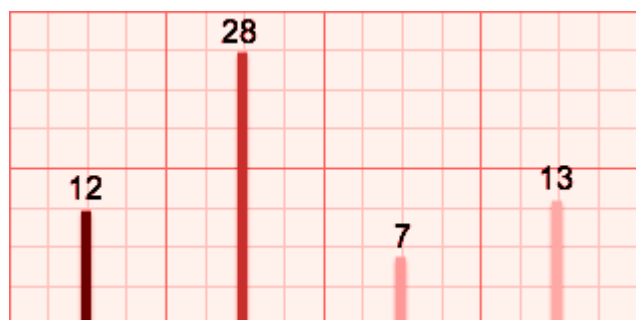
1) Diagrammes en bâtons

Définition

Pour représenter une série non regroupée en classes, on peut construire un **diagramme en bâtons** : on associe un bâton à chacune des valeurs distinctes de la série, dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif.

Exemple

Couleur	Rouge	Bleu	Vert	Jaune
Effectif	12	28	7	13



Le diagramme en bâtons ci-contre représente la série du tableau précédent, où un carreau en hauteur est égal à un effectif de 4.

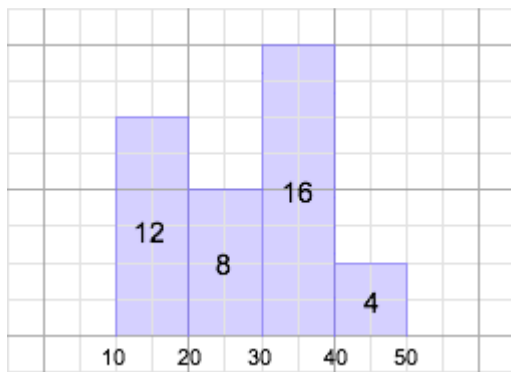
2) Histogramme

Définition

Pour représenter une série regroupée en classes, on peut construire un **histogramme** : on associe un rectangle à chacune des classes de la série, dont l'aire est proportionnelle à l'effectif.

Exemple

Taille (en cm)	[10 ; 20[[20 ; 25[[25 ; 40[[40 ; 50]
Effectif	12	8	16	4



L'histogramme ci-contre représente la série du tableau précédent, où un carreau en abscisse est égal à 5 cm et l'aire d'un carreau est égale à un effectif de 1.

Exercice

On a pesé des joueurs, les résultats exprimés en kilogramme sont regroupés dans le tableau suivant:

Poids(en Kg)	[60; 70[[70 ; 80[[80 ; 90[[90 ; 100[[100 ; 110[[110 ; 120[
Nombre de joueurs	4	10	18	24	14	10

- Quel est le type de caractère étudié ?
- Représenter cette série par un histogramme.

3) Diagramme circulaire :

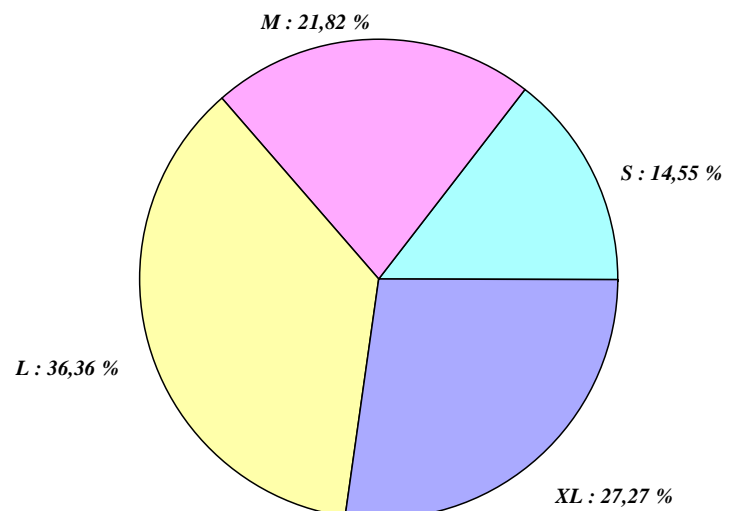
Chaque classe est représentée par un secteur circulaire dont la surface est proportionnelle à l'effectif. Il en est donc de même pour l'angle au centre.

Exemple :

Dans une boutique les tee-shirts sont vendus dans quatre tailles différentes : S, M, L, et XL. Les ventes mensuelles sont données par le tableau suivant :

Taille	S	M	L	XL
Nombre de ventes	16	24	40	30

Cette série statistique est représentée par le diagramme circulaire ci-contre :



Interprétation :

Les angles des secteurs s'obtiennent par proportionnalité. L'effectif de la population étant 110, la taille L occupe presque 36,4 % du disque. Par conséquent, l'angle du secteur angulaire représentant la taille L occupera 36,4 % de 360° c'est-à-dire presque 131°.

4) Polygone des fréquences

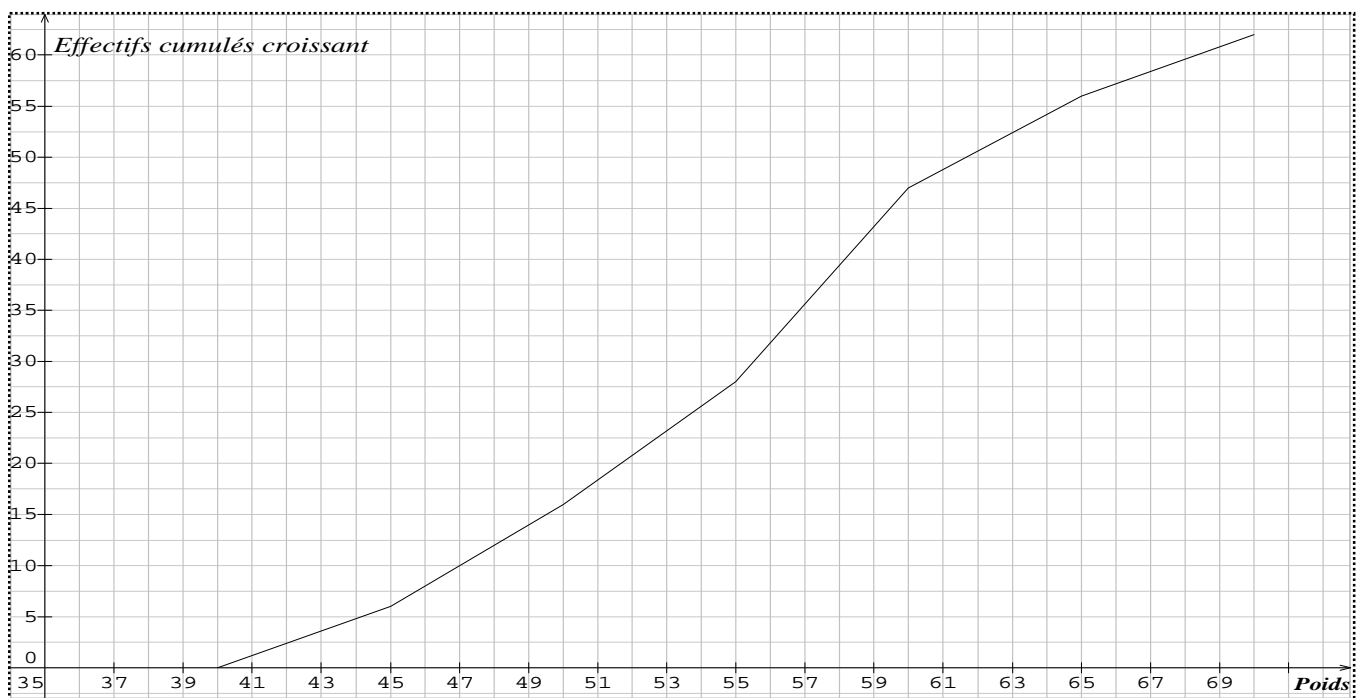
Un polygone de fréquence est obtenu en joignant par des segments de droites les extrémités des bâtons. Graphiquement, on obtient un ensemble de points que l'on relie par des segments de droites. On trace ainsi le polygone des effectifs cumulés croissants (ou décroissants).

Exemple :

On a pesé 60 garçons d'un club de natation voici les résultats :

Poids	[40 ; 45[[45 ; 50[[50 ; 55[[55 ; 60[[60 ; 65[[65 ; 70[
Effectifs	6	10	12	19	9	4
Effectifs cumulés croissants	6	16	28	47	56	60

Le polygone des effectifs cumulés croissants :



D'après ce polygone des effectifs cumulés croissants on peut déduire que moins de 50 % des garçons pesés ont un poids inférieur à 55,5 kilogrammes.

IV) Paramètres d'un caractère statistique :

On distingue deux types de paramètres sur un caractère statistique.

- ✓ **Les paramètres de position**
- ✓ **Les paramètres de dispersion**
- ✓

<u>Les paramètres de position</u>	<u>Les paramètres de dispersion</u>
Le mode ; La médiane ; La moyenne ; les quartiles	L'étendue ; L'écart type ; Variance ; Intervalles Interquartiles.

A / Paramètres de position

1) **Mode** : ou valeur dominante.

a) Pour un caractère discret :

Le mode est une valeur du caractère qui correspond à l'effectif le plus grand.

Exemple n° 1

Pour la série statistique ci dessous, le mode est 5 (l'effectif de 5 est 16).

Nombre de frères et sœurs	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'élèves	2	7	12	8	16	3	1

b) Pour un caractère qualitatif :

Exemple n°2

Le tableau suivant donne la répartition des mariages dans une salle de fête durant 2004.

Mois	Jan	Mars	Avr	Mai	Juin	Juil.	Août	Sep	Oct.	Nov.	Déc.
Nombre de mariages	3	3	10	7	20	36	18	15	11	5	1

Le mode de cette série est Juillet.

c) Pour un caractère quantitatif continue: (série classée) :

On définit la classe modale, la classe dont l'effectif est relativement le plus élevé et on attribut au mode la valeur centrale de cette classe.

Exemple: On a pesé 80 joueurs, les résultats exprimés en kilogramme sont :

Poids	[60 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 90[[90 ; 100[[100 ; 110[[110 ; 120[
Nombre de joueurs	4	10	18	24	14	10

Pour cette série la classe modale est [90 ; 100[car son effectif est le plus élevé : 24.

Le mode de cette série est : 95 ; $(\frac{90+100}{2} = 95)$.

- Si le polygone des effectifs ne présente qu'une seule pointe, la série est dite série **uni-modale**.
- Si le polygone des effectifs présente plusieurs pointes la série a plusieurs classes modales (ou plusieurs modes). La série est donc **multimodale**.

2°) **Moyenne :**

On considère un caractère quantitatif : (discret ou continu)

Valeur du caractère ou centre de l'intervalle	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

La moyenne arithmétique est alors le réel \bar{x} défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N} \quad \text{avec } N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p \text{ (N: effectif total)}$$

Exemple n°1 : Deux classes A et B ont fait le même devoir de contrôle de maths :

Classe A : 10 19 5 18 10 18 10 3 9 3 19 8 17 5 11 10 11 18 8 14 16 7 10 7 5.

Classe B : 11 10 4 7 12 3 6 17 9 19 13 11 10 6 7 19 18 11 10 7 3 4 14 9 8.

Calculer la moyennes de chaque série. (\bar{x}_A : la moyenne classe A \bar{x}_B : la moyenne classe B).

$$\bar{x}_A = \frac{3 \times 2 + 5 \times 3 + 7 \times 2 + 8 \times 2 + 9 + 10 \times 5 + 11 \times 2 + 14 + 16 + 17 + 18 \times 3 + 19 \times 2}{25} = 10,84$$

$$\bar{x}_B = \frac{3 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 2 + 7 \times 3 + 8 \times 1 + 9 \times 2 + 10 \times 3 + 11 \times 3 + 12 + 13 + 14 + 17 + 18 + 19 \times 2}{25} = 9,92$$

PROPRIÉTÉ

- Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre b, on augmente la moyenne de cette série par b.
- Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre a, la moyenne de cette série est aussi multipliée ou divisée par a.

PROPRIÉTÉ

Si une population d'effectif N est composée d'une partie d'effectif N_1 et de moyenne x_1 et d'une autre partie d'effectif N_2 et de moyenne x_2 la moyenne \bar{x} de la population totale est telle que :

$$\bar{x} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2}{N}$$

Exemple n°2:

Si dans une classe, les 15 garçons d'une classe mesurent en moyenne 182 cm et si les 20 filles mesurent en moyenne 168 cm, alors la taille moyenne d'un élève de cette classe est égale à

$$\frac{15 \times 182 + 20 \times 168}{15 + 20} = \mathbf{174 \text{ cm.}}$$

Exemple n°3 : Dans une entreprise, la répartition des salaires est la suivante :

Salaire en dinars	[300 ; 500[[500 ; 700[[700 ; 1000[[1000 ; 1500[
Nombre de salariés	50	25	12	3

Pour calculer le salaire moyen, on dresse d'abord un tableau donnant les centres de classe :

Classe salaire	Centre x_i	Effectifs n_i	$x_i \times n_i$	Fréquences f_i
[300 ; 500[400	50	20 000	$\frac{50}{90} = 0,55$
[500 ; 700[600	25	15 000	$\frac{25}{90} = 0,27$
[700 ; 1000[850	12	10 200	$\frac{12}{90} = 0,13$
[1000 ; 1500[1250	3	3750	$\frac{3}{90} = 0,033$
Total	//////////////	90	48 950	//////////////

- La moyenne de cette série est $\bar{x} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2}{N} = \frac{48\ 950}{90} = \mathbf{543,889 \text{ dinars}}$
- On peut encore calculer la moyenne en utilisant les fréquences (tableau ci-dessus).

$$\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = \mathbf{543,889 \text{ dinars}}$$

Remarque ; moyenne mode

- La moyenne d'un caractère quantitatif n'est pas nécessairement une valeur de ce caractère, alors que le mode est une valeur : c'est la valeur qui a l'effectif maximum.
- La moyenne est unique alors qu'il peut exister plusieurs modes.

3°) Médiane :

a) Définition :

L'idée générale est que la médiane est une valeur du caractère qui partage la population en deux parties de même effectif. De façon plus précise, on appelle médiane d'une série statistique **discrète** toute valeur M du caractère telle qu'au moins 50% des individus aient une valeur du caractère inférieure ou égale à M et au moins 50% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

b) Recherche pratique de la médiane : caractère quantitatif : discret

On range les valeurs du caractère une par une dans l'ordre croissant (chaque valeur du caractère doit apparaître un nombre de fois égal à l'effectif correspondant).

Si l'effectif total est impair, la médiane M est la valeur du caractère située au milieu.

Si l'effectif total est pair, la médiane M est la moitié de la somme des 2 valeurs situées au milieu.

Exemple 1 : On considère la série statistique suivante :

Valeur du caractère x_i	7	8	9	10	11	14	16
Caractère x_i	2	1	1	1	2	1	2

• Liste des valeurs du caractère : 7 ; 7 ; 8 ; 9 ; **10 ; 11** ; 11 ; 14 ; 16 ; 16

• L'effectif total est pair : la médiane M est : $M = \frac{10+11}{2} = 10,5$

Exemple 2 : On considère la série statistique suivante :

Valeur du caractère x_i	12	13	15	17	19	22
Caractère x_i	2	1	1	2	3	2

Liste des valeurs du caractère : 12 ; 12 ; 13 ; 15 ; 17 ; **17** ; 19 ; 19 ; 19 ; 22 ; 22

• L'effectif total est impair : la médiane M est la valeur située au milieu. D'où, **M = 17**.

c) Recherche pratique de la médiane : caractère quantitatif : continu

Dans le cas d'une série d'un caractère continu, l'intervalle de variation du caractère x est partagé en classes, la médiane est la valeur du caractère correspondant à un **effectif cumulé** égale à la moitié de l'effectif total. La médiane partage la série classée en deux parties de **même effectif**.

1^{ère} Méthode graphique pour déterminer la médiane :

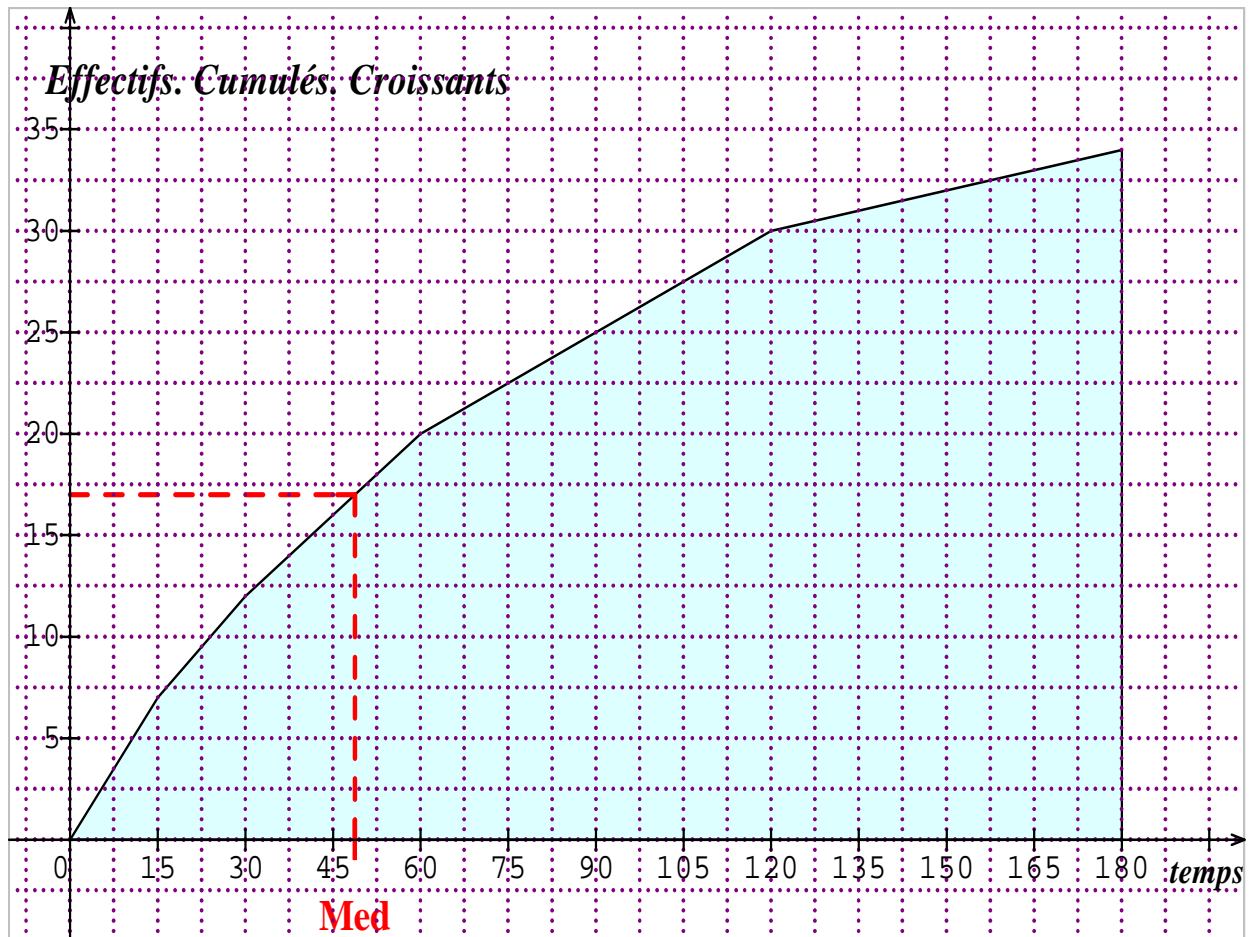
Dans ce cas, la médiane est déterminée par le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on trace la droite **horizontale** correspondant à la **moitié** de l'effectif total.

La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est égale à $\frac{N}{2}$ (où N est l'effectif total de la série).

Exemple 1 : Le temps en minutes passé devant l'ordinateur par 34 élèves pendant une journée est :

Temps en minutes	[0 ; 15[[15 ; 30[[30 ; 60[[60 ; 120[[120 ; 180[
Nombre d'élèves	7	5	8	10	4
Effectifs cumulés croissants	7	12	20	30	34
Fréquences cumul. crois.	0,21	0,36	0,59	0,88	1
Fréquences. Cumul. crois. en %	21	36	59	88	100

Le polygone des effectifs cumulés croissants correspondant :



L'effectif total est 34, la moitié de l'effectif total est 17 donc d'après le graphique ci-dessus, la médiane : Med est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est égale $\frac{34}{2} = 17$.
Graphiquement on lit : **Med = 48,75** ou **Med = 49 mn et 15 secondes**.

Interprétation :

La moitié de ce groupe d'élèves passe un temps inférieur à 49 mn et 15 secondes devant la télévision.

