Exercice n°1 :

Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B. 20% des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B. Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année. Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.

On note :

a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;

b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;

P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

1) Déterminer l'état initial P_1.
2) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3) En déduire que $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times \mathrm{M}$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.
4) Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
5) Déterminer le réel x tel que $(x \;;1-x)\times \mathrm{M} = (x \;;1-x)$.

Exercice n°2 :

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.

On suppose que l'effectif de cette population est stable.

Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.

30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.

L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.

Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

• 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.

• 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1) Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2) Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
3) a) Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.
   b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

4) On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)0,7^n \\ \frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)0,7^n \end{pmatrix}$$

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ?
Justifier.

Exercice n°3 :

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».

Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,

- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non fumeurs.

On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,

- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.

On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2) Justifier l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A$ où A désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
3) Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5) Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,5 f_n + 0,1$.
6) On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0,2$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
   d) Déterminer la limite de la suite f_n lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.