Prof : H-Jamel

Série mathématiques

Classe : bac sc - math

EXERCICE N°1

On considère dans C l'équation $(E) : z^2 - (3-i)z + 4 = 0$.

1°) a- Résoudre dans C l'équation (E) ;on note z_1 et z_2 les solutions / $\operatorname{Im}(z_1) > 0$

b- Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2°) Soit dans C l'équation $(E') : 3z^3 + (-9+i)z^2 + (14+6i)z - 8i = 0.$

a- Vérifier que $z_0 = \frac{2}{3}i$ est une solution de (E').

b- Déterminer les nombres complexes a , b et c tel que $\forall x \in C$ on a :

$$3z^3 + (-9+i)z^2 + (14+6i)z - 8i = (z - z_0)(az^2 + bz + c).$$

c- Résoudre alors l'équation (E').

3°) Le plan est rapporté à un R.O.N direct, on considère les points A , B et C

d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = 2-2i$ et $z_C = \frac{2}{3}i$.

a- Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et montrer que $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b- En déduire la nature du triangle ABC.

c- Ecrire une équation cartésienne du cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $\Re$ par : $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2+3}$.

On désigne par ξ_f la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Dresser le tableau de variations de f .

2°) a- Montrer que la droite $\Delta : y = -2x + 1$ est une asymptote à ξ_f.

b- étudier la position de ξ_f par rapport à Δ.

c- Tracer ξ_f et Δ dans le même R.O.N $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3°) a- Montrer que f réalise une bijection de $\Re$ sur un intervalle J a préciser.

b- Construire ξ_f et $\xi_{f^{-1}}$ dans le même R.O.N $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

c- Montrer que $\forall x \in J$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{2(x-1)}$.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\Re$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

5°) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = 1 + f'(\cos x)$.

www.devoirat.net 2015

a- ***Vérifier que*** $\forall\, x \in [0\,,\,\pi]\,,\; g(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$ ***et que*** $g\,'(x) = \dfrac{-3\sin x}{\left(\sqrt{\cos^2 x + 3}\right)^3}$.

b- ***Montrer que*** g ***réalise une bijection de*** $[0\,,\,\pi]$ ***sur un intervalle*** I ***on précisera .***

c- ***Déterminer le domaine*** D ***de la dérivabilité de*** g^{-1} ***et montrer que :***

$$\forall\, x \in D\,, \qquad \left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{\sqrt{3}}{(x^2-1)\sqrt{1-4x^2}}.$$

Bon travail

www.devoirat.net 2015