2015/2016

DEVOIR DE MAISON N°1

EXERCICE N1 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{4x}{2+x}$

1) Etudier la variation de f sur $[0,+\infty[$

2) Soit la suite U définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

   a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 \leq U_n < 2$

   b) Montrer que U est croissante

   c) Montrer que est convergente et calculer sa limite

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|U_n - 2|$

   b) En déduire que pour tout $n \in IN$: $|U_n - 2| \leq (\frac{2}{3})^n$

   c) Retrouver la limite de la suite U

EXERCICE N2:

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

1) a) Calculer A^2

   b) En déduire la matrice inverse A^{-1} de A

2) Calculer les matrices A^3, A^4, A^5 et A^6

3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

   $A^{2n} = 7^n.I_2$; (où I_2 est la matrice unité d'ordre 2) et $A^{2n+1} = 7^n.A$

EXERCICE N3:

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible.

2) Déterminer la matrice A^2

3) a) Vérifier que $A^2 + 5.A + 4.I_3 = \theta$; où θ est la matrice nulle d'ordre 3.

   b) En déduire la matrice inverse A^{-1} de A.

5) On considère le système S : $\begin{cases} -3x + y + z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \\ x + y - 3z = 1 \end{cases}$; $(x, y, z) \in IR^3$

   a) Ecrire S sous la forme matricielle.

   b) Résoudre alors dans IR^3 le système S.

6) Reprendre la résolution du système S dans IR^3 par la méthode de Cramer.

EXERCICE N4:

I/ 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(1+2i)z - 2 + 4i = 0$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P(z)= $z^3 - 2(1+3i)z^2 + 2(4i-5)z + 8 + 4i$

a) Montrer que l'équation P(z)=0 admet une solution imaginaire pure z_0 qu'on déterminera.

b) Déterminer les complexes b et c tels que $P(z)=(z-2i)(z^2+bz+c)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0

II/ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectifs 1+i , 2+2i , 1+3i , 2i

2) Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

3) Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixes z tels que $\left|\frac{\bar{z}-1+i}{iz+3-i}\right| = 1$

EXERCICE N5:

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β dans [0,2].

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution γ dans $[2,+\infty[$.

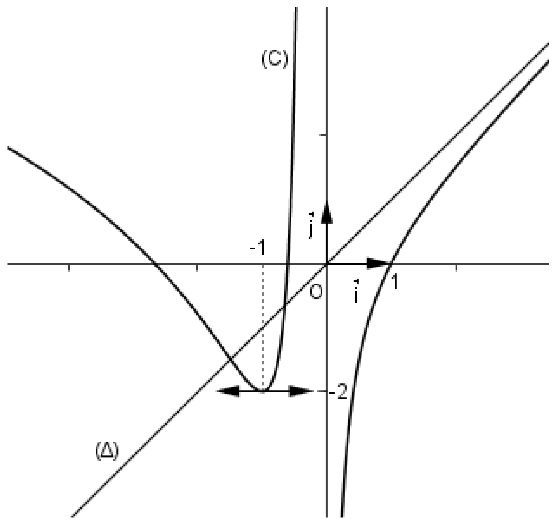
4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans IR exactement trois solutions α, β et γ.

Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ et que $2 < \gamma < 3$.

b) En déduire le tableau de signe de $f(x)$.

EXERCICE N6:

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé du plan, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie sur IR^*, les droites (Δ) : y=x et l'axe $(O, \vec{j})$ sont des asymptotes à (C). La courbe (C) admet au v(-∞)une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$.



1) Dresser le tableau de variation de f. (On demande les limites aux bornes et le signe de f '(x))

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(\tan x)$

3) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants :

]-∞,-1] ;]-∞, 0[et]0,+∞[

4) Soit la fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x-2\cos(\pi x)}{x-2} & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) = \frac{6(2-\sqrt{x^2+3})}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note h la fonction définie par : h=g o f

a) Montrer que $\frac{x+2}{x-2} \leq g(x) \leq 1$ pour tout $x \leq 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

c) Montrer que la fonction g est continue en 1.

d) Montrer que la fonction h est continue sur]0,+∞[.