- **Suite arithmétique :**

(U_n) suite arithmétique de raison r	$U_{n+1} - U_n = r$
Relation entre deux termes quelconques Terme général (Relation entre U_n et n)	$U_n - U_p = (n-p)r$ $U_n = U_0 + n \times r$ si U_0 est le premier terme de la suite
Somme $U_0 + U_1 + \dots\dots + U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$	$\sum_{k=0}^{n-1} U_k = \frac{\text{Nombre de termes}}{2}\left(1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}\right) = \frac{n}{2}(U_{n-1} + U_0)$

- **Suite géométrique :**

(U_n) suite géométrique de raison q	$U_{n+1} = qU_n$
Relation entre deux termes quelconques Terme général (Relation entre U_n et n)	$U_n = U_p q^{(n-p)}$ $U_n = U_0 q^n$ si U_0 est le premier terme de la suite
Somme $U_0 + U_1 + \dots\dots + U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$	$\sum_{k=0}^{n-1} U_k = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1-q^{(\text{Nombre de termes})}}{1-q} = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

- **Propriétés sur la $\sum$**
  - $\sum_{k\in I}(U_k + V_k) = \sum_{k\in I}(U_k) + \sum_{k\in I}(V_k)$.
  - $\sum_{k\in I}(\alpha U_k) = \alpha \sum_{k\in I}(U_k)$ où $\alpha \in \mathrm{IR}$.
  - $\sum_{k\in I}\alpha = \alpha \times (\text{nombre d'éléments de I})$
  - nombre d'éléments de $\sum_{k=p}^{n} U_k = n - p + 1 = \text{dernier indice} - 1^{er}\text{ indice} + 1$
  - Si on a : $U_n \le V_n$ alors $\sum_{k\in I}(U_k) \le \sum_{k\in I}(V_k)$.

- **Suites monotones :**
  - (U_n) est croissante sur I ssi $U_{n+1} - U_n \ge 0$ pour tout $n \in I$.
  - (U_n) est décroissante sur I ssi $U_{n+1} - U_n \le 0$ pour tout $n \in I$.
  - (U_n) est croissante sur I ssi $U_{n+1} = U_n$ pour tout $n \in I$.

  Remarque :
  Pour étudier la monotonie d'une suite (croissante ou décroissante)
  - On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
  - Quand $U_n > 0$, on compare $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ par 1.
  - Quand $U_{n+1} = f(U_n)$, On compare f(x) et x.

- **Suite majorée – minorée – bornée :**

  Soit (U_n) est définie sur I.
  - (U_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in I$ $U_n \le M$.

- (U_n) est minorée s'il existe un réel m tel que $\mathrm{U}_n \geq m$ pour tout $n \in \mathrm{I}$.
- (U_n) est bornée s'il existe deux réels m et M tels que $m \leq \mathrm{U}_n \leq M$ pour tout $n \in \mathrm{I}$.

<u>Remarque :</u>

Pour démonter qu'une suite est majorée ou minorée ou bornée on utilise en général la raisonnement par récurrence.

<u>Exemple :</u> Montrons que pour tout $n \in \mathrm{I}$, $a \leq \mathrm{U}_n \leq b$.

- <u>1ère étape :</u> Vérifions pour n = n_0 , $a \leq \mathrm{U}_{n_0} \leq b$.
- <u>2ème étape :</u> Supposons que $a \leq \mathrm{U}_n \leq b$ Démontrons que $a \leq \mathrm{U}_{n+1} \leq b$.

<u>1ère méthode :</u> Encadrement, on part de $a \leq \mathrm{U}_n \leq b$ et on démontre que $a \leq \mathrm{U}_{n+1} \leq b$.

<u>2ème méthode :</u> Différence , on démontre que $\mathrm{U}_{n+1} - b \leq 0$ et que $\mathrm{U}_{n+1} - a \geq 0$.

<u>3ème méthode :</u> Variation de la fonction f si $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{f}(\mathrm{U}_n)$.

- Si f est croissante $a \leq \mathrm{U}_n \leq b$ alors $\mathrm{f}(a) \leq \mathrm{f}(\mathrm{U}_n) \leq \mathrm{f}(b)$.
- Si f est croissante $a \leq \mathrm{U}_n \leq b$ alors $\mathrm{f(b)} \leq \mathrm{f}(\mathrm{U}_n) \leq \mathrm{f(a)}$.

<u>Suites convergentes :</u>

- Une suite est convergente si elle admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$
  $\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty}(U_n - l) = 0$.
- Toute suite convergente est bornée (La réciproque est fausse : <u>exemple</u> : $U_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente)
- **<u>Règle de convergence des suites monotones :</u>**
  - Toute suite croissante et majorée est convergente.
  - Toute suite décroissante et minorée est convergente.

1er hypothèse à partir d'un certain rang	2ème hypothèse comportement en $+\infty$	Conclusion
$V_n \leq \mathrm{U}_n \leq W_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty}(W_n) = \lim\limits_{n \to +\infty}(V_n) = l$	(U_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n) = l$
$\lvert \mathrm{U}_n \rvert \leq \lvert V_n \rvert$	$\lim\limits_{n \to +\infty}(V_n) = 0$	(U_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n) = 0$
$a \leq \mathrm{U}_n \leq b$	$\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n) = l$	$a \leq l \leq b$
$\mathrm{U}_n \leq V_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n) = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}(V_n) = l'$	$l \leq l'$
$\mathrm{U}_n \leq V_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty}(V_n) = -\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n) = -\infty$
$V_n \leq \mathrm{U}_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty}(V_n) = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n) = +\infty$

- Recherche de la limite d'une suite : $U_{n+1} = f(U_n)$
- Si $\begin{cases} U_n \in D \\ \text{f est continue sur D} \\ U_n \text{ est convergente vers } l \end{cases}$ alors $f(l) = l$

Si -1< q < 1	$\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = 0$
Si q >1	$\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = +\infty$
Si q ≤ -1	Pas de limite

- ❖ **Suites adjacentes :**
  - ➢ Deux suites U et V sont adjacentes lorsqu'elles vérifient :
    - $U_n \leq V_n$.
    - (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
    - $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$.
  - ➢ Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Exercice d'application:

Soit a et b deux nombres réels vérifiant 0 < a < b. On définies les suites (U_n) et (V_n) par :

$U_0 = a,\ V_0 = b,\ U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n},\ V_{n+1} = \dfrac{U_n+V_n}{2}$

1) Vérifier que (U_n) et (V_n) sont strictement positives.
2) On pose pour tout entier naturel n $T_n = U_n - V_n$.
   a) Montrer que pour tout entier n , T_n >0 puis $0 < T_{n+1} < \dfrac{1}{2}T_n$.
   b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < T_n < \dfrac{b-a}{2^n}$.
3) Démontrer alors que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.