Exercice n°1

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 + 10x - 1$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$
3) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$
4) Donner une valeur approché de α à 10^{-1} près

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & si\ \ x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi(1-x)} & si\ x \in [-1,1[\end{cases}$

1) Calculer la limite de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en -1
2) Calculer la limite de f à droite en 1
3) Sachant que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$, déterminer $f(\,]-\infty, -1[\,)$ et $f(\,]1, +\infty[\,)$
4) Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 1.
5) Monter que l'équation $f(x) = \frac{1}{\pi}$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$
6) Soit h la restriction de f à $]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$ et $g = h \circ h$

   a- Déterminer l'ensemble de définition E de g

   b- Calculer les limites de g aux bornes de E

Exercice n°3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout x < 0 on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$.

   b) Montrer que f est continue en 0.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.
3) Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in \,]-2 , -1[$ tel que $f(x_0) = 0$.
4) a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) = -1 + \dfrac{4}{2 + \sqrt{x}}$.

   b) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0 , +\infty[$. Déterminer alors l'image de $[0 , +\infty[$ par f.

   c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \,]0 , 1[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = 2x - \cos(\pi x)$.

1) *Etudier les variations de f sur [0,1].*
2) *Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution* α *et donner un encadrement d'amplitude* 10^{-1} *de* α *.*
3) *Prouver que* $\tan(\pi\alpha) = \sqrt{\dfrac{1}{4\alpha^2} - 1}.$

Exercice n°5

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x^2+1} & si\ \ x \succ 0\\ x^3+2x+1 & si\ \ x\le 0\end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout x $\in [0,+\infty[$: $\quad 0 \le f(x) \le \dfrac{3x+1}{x^2+1}$

(Indication : Comparer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ pour a et b deux réels positifs)

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en 0.

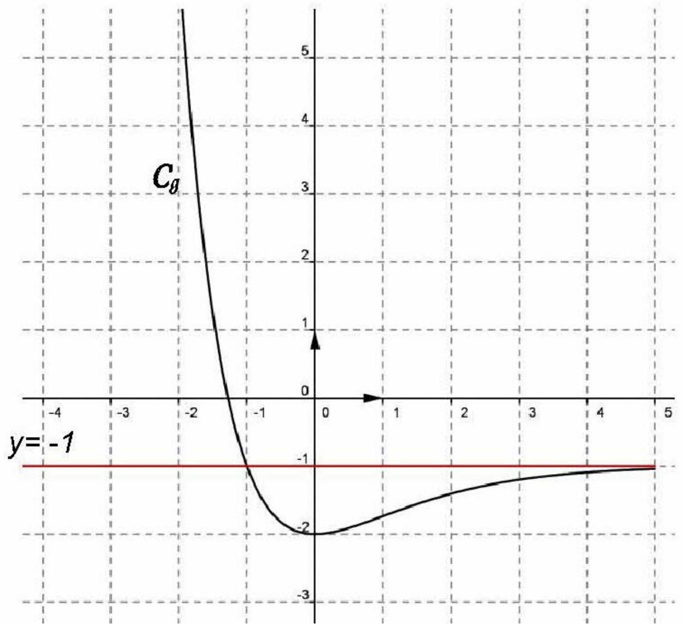
3) a) Etudier les variations de f sur$]-\infty,0]$.

b) Monter que l'équation f(x) =0 admet dans $]-\infty,0]$ une unique solution α puis vérifier que -0,5 ≤ α ≤ -0,4.

4) La courbe C_g ci dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur IR.

C_g admet la droite D : y =-1 comme asymptote horizontale au voisinage de $(+\infty)$

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} fog(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} fog(x)$



Exercice n°6

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1} & si\quad x<(-1)\\ 1+\sqrt{1-x^2} & si\quad (-1)\le x\le 1\\ \dfrac{2x^2-3x+1}{3(x-1)} & si\quad x\succ 1\end{cases}$

1) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) *Montrer que f est continue en 1.*

3) *a- Montrer pour tout* $x<-1$ *on a* $\dfrac{1}{x+1} \le f(x) \le \dfrac{-1}{x+1}$.

b-Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) *Montrer que* $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$. *Interpréter géométriquement.*

5) *On pose* $g(x) = f(x) - 2x$ *pour* $x \in [0\,;1]$

a- Dresser le tableau de variation de g

b- Montrer que l'équation $f(x) = 2x$ *admet une seule solution* $\alpha \in [0\,;1]$

c- Vérifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha <$

Exercice n°1

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

une justification est demandée

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O

1) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

   a) 3 ; b) i ; c) $3 + i$

2) Soit z un nombre complexe, $|z + i|$ est égal à :

   a) $|z| + 1$; b) $|z - 1|$; c) $|i\bar{z} + 1|$

3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

   a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$; b) $\frac{2\pi}{3} + \theta$; c) $\frac{2\pi}{3} - \theta$

4) Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :

   a) La droite (AB) ; b) Le cercle de diamètre $[AB]$; c) la perpendiculaire à (AB) passant par O

Exercice n°2

Le plan complexe est rapporté au repère ON direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A(-2i), B(-i/2), I(i) et J(-i).

f étant l'application qui à tout point M(z) distinct de A, associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{2iz - 1}{z + 2i}$.

1) Déterminer les points invariants de f.

2) a) Montrer que si M ≠ A et M ≠ B on a : $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})\ [2\pi]$.

   b) En déduire les ensembles suivants : $E_1 = \{M(z) \text{ tq } z' \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{M(z) \text{ tq } z' \in i\mathbb{R}_+^*\}$.

3) Montrer que si z ≠ i et z ≠ -i alors $\frac{z' + i}{z' - i} = 3\frac{z + i}{z - i}$.

4) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M tel que $MJ = \frac{1}{3} MI$.

   a) Vérifier que A ∈ $\mathscr{C}$ puis déterminer et construire $\mathscr{C}$.

   b) Montrer que si M ∈ $\mathscr{C}\backslash\{A\}$ alors M' décrit une droite fixe que l'on déterminera.

Exercice n°3

1) Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$.

A tout complexe z différent de z_A on associe le complexe $z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$

Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

   a- Montrer que B ∈ (E).

   b- Déterminer l'ensemble (E).

   c- Montrer que $|z'| = \frac{BM}{AM}$ et déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

2) Soit n un entier naturel. On considère les points A_n d'affixe $(1 + i)^n$.

   a- Donner la forme exponentielle de $(1 + i)^n$.

   b- Pour quelles valeurs de n, les points A_n sont situés sur l'axe des réels?

Exercice n°4

1) *Montrer que* $-4-4i = 4\sqrt{2}.e^{i\frac{5\pi}{4}}$

2) *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{V})$ *on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives* $Z_1 = -2i$, $Z_2 = 4-2i$, $Z_3 = 4+2i$ *et* $Z_4 = 1$

a- *Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe* $\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_3}$

b- *Déduire que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B*

3) *Soit M un point du plan d'affixe* Z *tel que* Z $\neq$ *-2i et M' d'affixe Z' avec* $Z' = \dfrac{Z - Z_3}{Z - Z_1}$

a- *Déterminer l'ensemble* $\Delta = \{M\ d'affixe\ Z\ tel\ que\ |Z'| = 1\}$

b- *Ecrire sous forme cartésienne le nombre complexe suivant* $(Z' - 1).(Z + 2i)$

c- *Déduire que*

$DM'.AM = 4\sqrt{2}$ *et* $(\vec{u};\overrightarrow{DM'}) + (\vec{u};\overrightarrow{AM}) \equiv \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

Exercice n°5

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$

1°) Déterminer le module et un argument de z_A.

2°) a/ Montrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

b/ Déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_B}{z_A}$

3°)a/ En déduire que $z_B = (\sqrt{2}+\sqrt{6})\,e^{i\pi/12}$

b/ Donner alors une construction du point B

Exercice n°6

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On note A et B les points d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$.

Soit $f : P\setminus\{A\} \to P; M(z) \to M'(z')$ *telque* $z' = \dfrac{z-i}{z-i\sqrt{3}}$

1. Dans cette question, on prend z = 1 et z' le complexe qui lui correspond.

a) Donner la forme algébrique de z'.

b) Donner la forme trigonométrique de z'.

c) Déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

2 .Soit l'ensemble E des points M(z) tel que $\left|\dfrac{z-i}{z-i\sqrt{3}}\right| = 1$; Prouver que E est la médiatrice de [AB].

3. a) Montrer que $\forall z \in X\setminus\{i;i\sqrt{3}\}$ on a $\arg(z') \equiv (\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})[2\pi]$ avec M le point d'affixe z.

b) Soit F= {M(z) tel que z' est un réel non nul}

A l'aide de 3)a); montrer que F est la droite (AB) privée de A et B.