

Exercice n° 1 (4points)

Répondre par vrai ou faux avec justification

1) pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n+1$ et n^2+2 sont premiers entre eux

2) pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2^n+3^n \equiv 5^n \pmod{6}$

3) on pose pour tout $x \geq 1$ $G(x) = \int_0^{\ln x} e^{-t} \sqrt{t} dt$ alors $G'(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2}$

4) La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est paire

Exercice n° 2 (6points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(1,0,0)$; $B(0,2,0)$; $C(0,0,3)$ et $\Omega (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$

1)a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

c) Montrer que ΩABC est un tétraèdre et calculer son volume

2) Soit S la sphère de centre Ω et passant par O

a) Déterminer une équation cartésienne de S

b) Vérifier que S passe par A ; B et C .

c) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport -2

a) Déterminer l'expression analytique de h

b) Déterminer une équation cartésienne de $S' = h(S)$ et en déduire $S' \cap (ABC)$

Exercice n° 3 (5points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $44x - 5y = 2$

1)a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de l'équation $44x - 5y = 1$

c) En déduire une solution particulière de l'équation $44x - 5y = 2$

2) On considère les entiers n, a, b et c tels que $n = 4a + 2 = 11b + 2 = 5c + 4$

a) Montrer qu'il existe un entier p tel que $a = 11p$ en déduire que $44p - 5c = 2$

b) Résoudre alors dans \mathbb{Z} le système
$$\begin{cases} n \equiv 2[4] \\ n \equiv 2[11] \\ n \equiv 4[5] \end{cases}$$

Exercice n°4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 e^{(1-x)}$

Soit (ζ_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1/a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} puis calculer sa fonction dérivée $f'(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Tracer (ζ_f)

2/ Soit n un entier naturel non nul on considère l'intégrale I_n définie par
$$I_n = \int_0^1 x^n e^{(1-x)} dx$$

a) A l'aide d'une intégration par partie montre que $I_1 = e - 2$

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

c) Calculer l'aire de la partie du plan limité par (ζ_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

3/a) Montrer que pour tout nombre réel x de $[0, 1]$ et pour tout n un entier naturel non

$$\text{nul on a } x^n \leq x^n e^{(1-x)} \leq e \cdot x^n$$

b) En déduire un encadrement de I_n puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice n°4(5 points)

I) Soit $g(x) = e^x - x - 1$.

Etudier les variations de g et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x - 1 \geq 0$.

II) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un R.O.N (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2) Montrer que f est continue en 0.

On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$

3) a) Vérifier que pour tout $x \neq 0$, on a: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à (C) .

d) Tracer (C) .

4) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer la courbe (C') de f^{-1} .

5) Pour tout entier naturel non nul n on pose $U_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que la suite (U_n) est décroissante puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.