

**Exercice n°1 (4pts)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

une justification est demandée.

1) T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur  $[10 ; 20]$  alors  $p(T \geq 16)$ :

- a) 0,8                                      b) 0,6                                      c) 0,4

2) X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  telle que

$$p(X \leq 2) = \frac{1}{2} \text{ alors } \lambda \text{ est égale à :}$$

- a) 2                                      b)  $\ln(\sqrt{2})$                                       c)  $\frac{1}{2}$

3) La limite de  $(x + 1 + e^{-x})$  quand x tend vers  $-\infty$  est égale à :

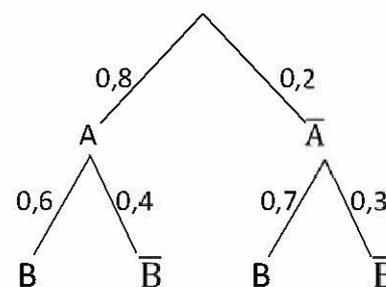
- a)  $-\infty$                                       b) 0                                      c)  $+\infty$

4) Une expérience aléatoire est représentée

par l'arbre pondéré ci-contre.

La probabilité de l'évènement  $A \cup B$  est égale à :

- a) 0,48                                      b) 0,94                                      c) 0,14

**Exercice n°2 (5pts)**

Un sondage effectué dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage a donné les résultats suivants :

- 65% des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage.
- Parmi les personnes qui sont contre la construction du barrage, 70% sont des écologistes.
- Parmi les personnes favorables à la construction 20% sont des écologistes.

On note par : B : " La personne interrogée est pour la construction du barrage "

E : " La personne interrogée est écologiste "

1. Modéliser les hypothèses par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
  - a) La personne interrogée est pour la construction du barrage et elle est écologiste.
  - b) La personne interrogée est contre la construction du barrage et elle est écologiste.
  - c) La personne interrogée est écologiste.
  - d) La personne interrogée est pour la construction du barrage sachant qu'elle est écologiste.
3. On choisit maintenant cinq personnes parmi les personnes interrogées et on note X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre des écologistes.
  - a) Déterminer la probabilité d'avoir au moins une personne écologiste parmi les cinq.
  - b) Déterminer  $E(X)$  et  $\sigma(X)$ .

### Exercice n°3 (6pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1 - \frac{2}{1+e^x}$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (Unité graphique : 3cm).

1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) a) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $(C)$  au point  $O$ .

b) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \frac{x}{2} - f(x)$

- Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $h'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ .

- Calculer  $h(0)$  et en déduire le signe de  $h(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Préciser la position relative de  $(C)$  par rapport à  $T$ . En déduire que  $O$  est un point d'inflexion pour  $(C)$ .

3) Tracer dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $(C)$  et  $T$ .

4) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

b) Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in ]-1, 1[$ .

c) Tracer dans le même repère orthonormé la courbe  $(C')$  représentative de  $f^{-1}$ .

5) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{1+e^x}$

b) Calculer l'aire  $A$  en  $\text{cm}^2$  du domaine plan limité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = \ln 2$ .

c) En déduire l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine  $D$  du plan limité par la courbe  $(C')$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $y = \ln 2$

### Exercice n°4 (5pts)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = x[1 + \ln(x+1) - \ln x] & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par  $\varphi$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.  $f$  est-elle dérivable à droite en 0 ?

b) Montrer que pour tout réel  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1}$

2) a) Prouver que pour tout réel  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) = x + x \ln(1 + 1/x)$  et en déduire que  $f(x) \geq x$ .

b) Calculer alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$

3) a) Montrer que la droite  $\Delta: y = x + 1$  est une asymptote à  $\varphi$  au voisinage de  $+\infty$

b) Etablir que pour tout  $t \in [0; +\infty[$ ,  $\ln(1+t) \leq t$

(On pourra étudier le sens de variation de la fonction  $u : t \mapsto t - \ln(1+t)$ )

c) En déduire la position de  $\varphi$  par rapport à  $\Delta$

d) Tracer  $\varphi$  et  $\Delta$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

## Exercice n°1 autre projet

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à  $0,12$ .

**Tous les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$**

**D)** Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin de façons identiques et indépendantes.

1) Calculer la probabilité de l'événement A « deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation »

2) Montrer que la probabilité de l'événement B « au moins 19 des moteurs ne tombent pas en panne au cours de la première année d'utilisation » est  $0,289$

**II)** On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$

1) Exprimer  $p(Y \leq 1)$  en fonction de  $\lambda$ . En déduire la valeur de  $\lambda$ .

*Pour la suite de l'exercice, on prendra  $\lambda = 0,128$ .*

2) Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 6 mois ?

3) Un moteur n'a pas tombé en panne au bout d'une année. Calculer la probabilité qu'il dure plus de 4 ans

## Exercice n°2

Un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage a donné les résultats suivants :

- 65% des personnes sont contre la construction,
- parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont des écologistes,
- parmi les personnes qui sont pour la construction, 20% sont écologistes.

On note  $C$  l'événement « la personne concernée est contre la construction »,  $D$  l'événement contraire,  $E$  l'événement « la personne concernée est écologiste » et  $F$  l'événement « la personne concernée est contre la construction et n'est pas écologiste ».

1. Calculer les probabilités  $p(C)$ ,  $p_C(E)$ ,  $p_D(E)$ .

2. a. Calculer la probabilité qu'une personne soit contre la construction et soit écologiste.

b. Calculer la probabilité qu'une personne soit pour la construction et soit écologiste.

c. En déduire la probabilité qu'une personne soit écologiste.

3. Calculer la probabilité  $p_E(C)$ .

4. Montrer que  $p(F) = 0,195$ . On choisit au hasard 5 personnes. Quelle est la probabilité qu'au moins une d'elles soit contre la construction et ne soit pas écologiste ?



1. Démontrer que pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $A'(x)$  a le même signe que  $g(x)$ , où  $g$  est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction  $A$  sur  $[0; +\infty[$ .

### Partie 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ . On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . La figure est donnée ci-dessous.

Pour tout réel  $x$  positif ou nul, on note :

$M$  le point de (C) de coordonnées  $(x; f(x))$ ,

$P$  le point de coordonnées  $(x; 0)$ ,

$Q$  le point de coordonnées  $(0; f(x))$ .

1. Démontrer que l'aire du rectangle  $OPMQ$  est maximale lorsque  $M$  a pour abscisse  $\alpha$ .

2. Le point  $M$  a pour abscisse  $\alpha$ . La tangente (T) en  $M$  à la courbe (C) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

