Exercice 1

Répondre par vrai ou faux

1) L'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{1-e^{x}}$ est $]-\infty,0]$.
2) L'équation $e^{2x}+e^{x}-2=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x}+1}{e^{x}+2}=2$.
4) La suite $V_n=e^{\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}$ est divergente.
5) Les suites $e^{\left(\frac{-1}{n}\right)}$ et $e^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ sont adjacentes.
6) Soit F la fonction définie par $F(x)=\int_{-1}^{x}\left(e^{t}-t\right)dt$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de C.
7) $\int_{-2015}^{2015}x^{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)dx=0$.
8) $\int_{\ln 3}^{3\ln 2}e^{x}\sqrt{e^{x}+1}dx=\dfrac{38}{3}$.
9) $\int_{1}^{2}e^{\left(x^{2}\right)}dx \ge \int_{1}^{2}e^{\sqrt{x}}dx$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-e^{x}-2$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

1) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
2) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer la courbe C_f.
5) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ exprimée en u.a du domaine plan limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-\ln 2$ et $x=\ln 2$.

Exercice 3

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-2x}$.

1) Montrer que la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n=f(n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme U_0 .
2) Exprimer la somme $S_n=U_0+U_1+........+U_n$ en fonction de n.
3) Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Pour x réel, on pose $f(x)=\ln(e^{2x}+e^{x}+1)$.

(C_f) désigne la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3) **a)** Montrer que pour tout réel x, on a $f(x)=2x+\ln\left(1+e^{-x}+e^{-2x}\right)$

   b) Montrer que (C_f) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$.

   c) Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).
4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$.

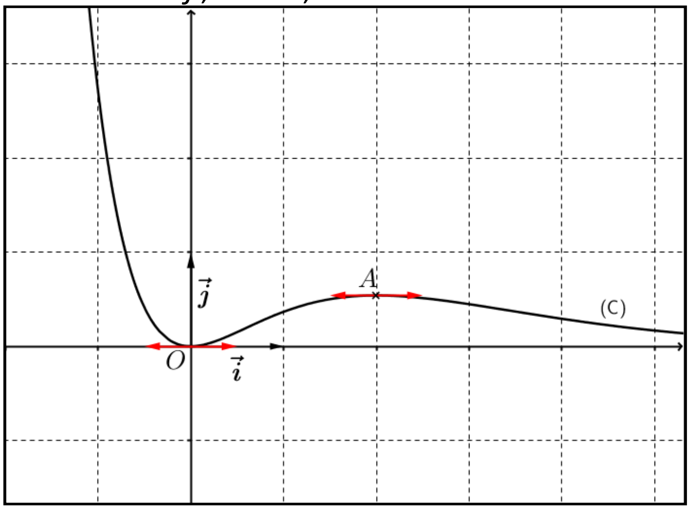
Exercice 5 (bac tech pr 2008)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. On a représenté ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que la courbe admet:

– Une asymptote d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.

– Seulement deux tangentes horizontales, l'une au point O et l'autre au point $A(2,4e^{-2})$.



En utilisant le graphique:

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre des solutions de l'équation: $f(x)=m$.

II. On suppose que la fonction f est définie par: $f(x)=x^2e^{-x}$. On note f' la fonction dérivée de f.

1) Vérifier que ,pour tout réel x, $f'(x)=2xe^{-x}-f'(x)$.

2) Soit $I=\int_0^2 xe^{-x}dx$ et $J=\int_0^2 f(x)dx$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I=1-3e^{-2}$.

b) En utilisant **II.1)**, montrer que $J=2I-\int_0^2 f'(x)dx$.

c) En déduire la valeur de J et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 6 (bac tech pr 2009)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+e^x-xe^x$.

On note ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On donne ci-dessous le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a) Justifier que la restriction g de f à $[0,+\infty[$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

c) Vérifier que $1<\alpha<1,5$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la position relative de la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite Δ d'équation $y=x$.

c) Tracer ($\mathscr{C}$) et Δ.

3) On note g^{-1} la fonction réciproque de g et ($\mathscr{C}$') sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer ($\mathscr{C}$').

4) a) Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x+(2-x)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite Δ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

c) En déduire que $\int_1^2 g^{-1}(x)dx=e-2$.