Série fonction exponentielle

Mr :Afli Ahmed
23/03/2015

❖ Exercice n°1 :

I°/ Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = (1\text{-}2x)e^{-2x} + 1$

1. Etudier les variations de g.
2. En déduire que pour tout réel x on a : $g(x) > 0$

II°/ Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x + xe^{-2x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;i,j) (unité 2cm)

1. a- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b- Montrer que la droite D : y = x est une asymptote à C_f au voisinage de +∞ et étudier la position de C_f par rapport à D.

c- Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Puis interpréter.

2 .a- Calculer f ‘(x) et vérifier que f ‘(x) = g(x).

b– Dresser le tableau de variation de f.

3 .a – Donner une équation de la tangente T à C_f au point O(0 ;0)

b – Montrer que le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour C_f

4 .Tracer T , D et C_f.

5 . Soit A l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations respectives y =x , x=0 et x =1

Calculer A en cm^2.

❖ Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x - \frac{2}{e^x+1}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ;i,j)

1°) a. Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = 1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

b. Etudier les variations de f .

2°) a. Montrer que le point I(0 ; -1) est un centre de symétrie de C.

b. Ecrire une équation cartésienne de la tangente à C au point I.

3°) a. Montrer que la droite D : y= x -2 est une asymptote oblique à C au voisinage de - ∞

Etudier la position de C par rapport à D

b. Montrer que C admet une asymptote oblique D' au voisinage de +∞ que l'on déterminera .

Etudier la position de C par rapport à D'.

4°) a. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans R et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

b. Montrer que $e^{\alpha} = \frac{2-\alpha}{\alpha}$

5°) Tracer D,D',T et la courbe C.

6°) a. Montrer que f réalise une bijection de R sur R

b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur R et calculer $(f^{-1})'(-1)$

c. Montrer que $(f^{-1})'(0) = \frac{2}{2+(2-\alpha)\alpha}$.

❖ Exercice n°3 :

Les courbes (C) et (C') ci-dessous sont les représentations graphiques d'une fonction f et de sa dérivée f '

- (C) ∩ (C') ={O}
- (C') coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse au point d'abscisse -2
- La droite d'équation y = 0 est une asymptote au voisinage de $-\infty$
- (C) et (C') admettent une branche parabolique de direction (OJ) au v(+∞)

1./Par une lecture graphique :

a.Déterminer parmis les courbes (C) et (C') celle qui représente f et f '.

b. Déterminer f(0) , f '(0) et f '(-2)

c. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

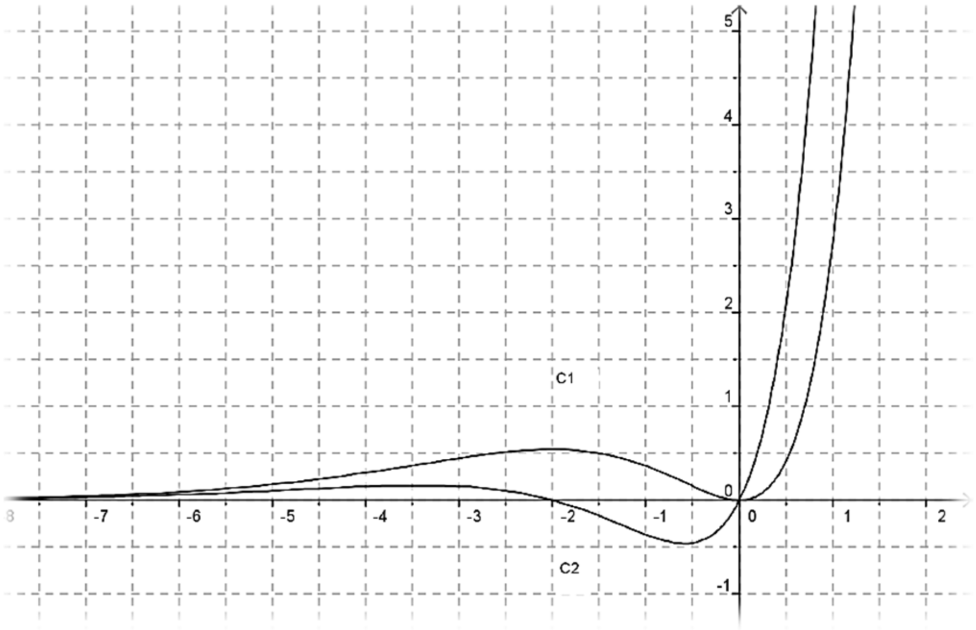
d. Dresser le tableau de variation de f

2./ On suppose que f est définie par $f(x) = x^2e^x$

Soit k<0 et A(k) l'aire de la partie du plan limitée par (C) et (C') et les droites d'équation : x=0 et x = k.

a. Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) - f(x) = 2xe^x$

b. Calculer A(k) en fonction de k et en déduire $\lim_{k\to-\infty} A(k)$



❖ Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

2/a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3/a) Justifier que la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

b) Utiliser le tableau ci-dessous pour préciser la position relative de C_f et T

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)+\frac{3}{2}$	$-$	0	$+$

c) Tracer T et C_f.

4/ Soit λ un réel strictement positif. On désigne par A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x=\lambda$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) Montrer que $A_\lambda = -e^{-\lambda} + \ln(1+e^{-\lambda}) + 1 - \ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$.

❖ Exercice n°5 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) + \frac{1}{3}x$.

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère o.n ; $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite (D) d'équation : $y = \frac{1}{3}x$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

   c. Étudier la position relative de (D) et C_f.

2. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

   b. En déduire la limite de f en $-\infty$.

   c. Montrer que la droite (D') d'équation : $y = -\frac{2}{3}x$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.

3. On note f' la fonction dérivée da la fonction f.

   a. Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{e^x - 2}{3\left(e^x+1\right)}$.

   b. En déduire les variations de la fonction f.

4. a. Montrer que $f(\ln 2) = \frac{2}{3}\ln(\frac{3}{2})$.

   b. Tracer C_f.