Analogie : Electrique - mécanique

Mécanique	Electrique
Masse **m** en Kg	Inductance **L** en Henry H
Raideur **K** en $N.m^{-1}$	Inverse de la capacité $\frac{1}{C}$ (C en Farad F)
Coefficient de frottement **h** en $kg.s^{-1}$	Resistance totale $R = R_0 + r$ en Ω
Elongation **x** en m	Charge **q** en Coulomb C
La vitesse $v = \frac{dx}{dt}$ en $m.s^{-1}$	L'intensité $i = \frac{dq}{dt}$ en A
Energie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2$	Energie électrostatique : $E_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\, C\, u_c^2$
Energie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}m.v^2$	Energie magnétique : $E_L = \frac{1}{2}L.i^2$
Energie mécanique $E = E_{pe} + E_C = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m.v^2$	Energie électromagnétique : $E = E_{pe} + E_L = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L.i^2$

Oscillations libres

Mécanique

amorties :Eq diff : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}.x = 0$

*- si h faible (régime pseudo- périodique)

*- si h grande (régime apériodique)

$$\frac{dE}{dt} = -h.v^2 < 0$$

non amorties : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2.x = 0$ avec

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$$x(t) = X_m.\sin(\omega_0 .t + \varphi_x)$$

$$v(t) = V_m.\sin(\omega_0 .t + \varphi_v)$$

$$V_m = X_m.\,\omega_0 \quad \text{et} \quad \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$$

Période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$E =$ constante $= \frac{1}{2}KX_m{}^2 = \frac{1}{2}\, mV_m{}^2$

Electrique

amorties : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R_0+r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}.q = 0$

*- si $R_0 + r$ faible (régime pseudo- périodique)

*- si $R_0 + r$ grande (régime apériodique)

$$\frac{dE}{dt} = -(R_0 + r).i^2 < 0$$

non amorties : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}.q = 0$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$x(t) = Q_m.\sin(\omega_0 .t + \varphi_q)$$

$$i(t) = I_m.\sin(\omega_0 .t + \varphi_i)$$

$$I_m = Q_m.\,\omega_0 \quad \text{et} \quad \varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$$

Période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

$E =$ constante $= \frac{1}{2}\frac{Q_m{}^2}{C} = \frac{1}{2}\, LI_m{}^2$

Oscillations forcées en régime sinusoïdal

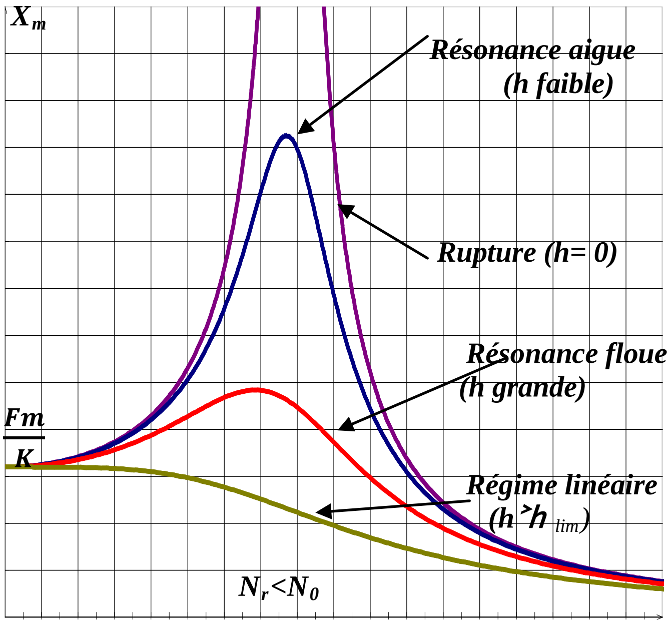
Mécanique	Électrique
Force excitatrice $F(t) = F_m.\sin(\omega t + \varphi_F)$	Tension excitatrice $u(t) = U_m.\sin(\omega t + \varphi_u)$
Equation différentielle : D'après la RFD : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{f}+\vec{T}+\vec{F}=m\vec{a}$ Par projection sur (x'x) : $f + T + F = m.a$ $\Rightarrow$ $m.\frac{d^2x}{dt^2} + h.\frac{dx}{dt} + K.x = F_m.\sin(\omega t + \varphi_F)$	Equation différentielle : D'après la loi des mailles $u_{R0} + u_b + u_C = u(t) = U_m.\sin(\omega t + \varphi_u)$ $\Rightarrow$ $L.\frac{d^2q}{dt^2} + (R_0+r)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}.q = u(t) = U_m.\sin(\omega t + \varphi_u)$
$x(t) = X_m.\sin(\omega t + \varphi_x)$ est solution de l'équation différentielle	$q(t) = Q_m.\sin(\omega t + \varphi_q)$ est solution de l'équation différentielle
D'après le théorème de Pythagore dans la construction de Fresnel $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (K - m\omega^2)^2}}$ $\xrightarrow{\text{par Analogie}}$	$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R0+r)^2\omega^2 + (\frac{1}{C} - L\omega^2)^2}} = \frac{I_m}{\omega}$

Résonance d'élongation $\longrightarrow$ **Résonance de charge**

X_m est maximale $\Rightarrow$ $\Delta = h^2\omega^2 + (K - m\omega^2)^2$ est minimale $\Rightarrow$ $\frac{d\Delta}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$

$$\boldsymbol{N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$$

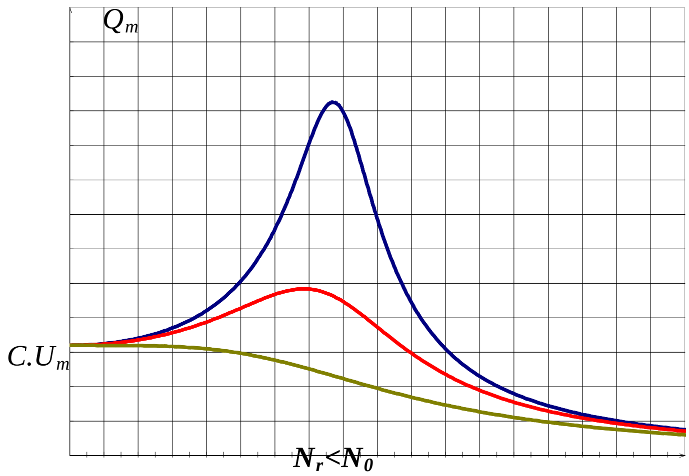
La résonance d'élongation se fait toujours pour fréquence de l'excitateur $N_r \leq N_0$, plus h augmente Plus N_r diminue



Q_m est maximale $\Rightarrow$ $\Delta = (R0 + r)^2\omega^2 + (\frac{1}{C} - L\omega^2)^2$ est minimale $\Rightarrow$ $\frac{d\Delta}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R_0 + r)^2}{2L^2}}$

$$\boldsymbol{N_r^2 = N_0^2 - \frac{(R_0 + r)^2}{8\pi^2 L^2}}$$

La résonance de charge se fait toujours pour fréquence de l'excitateur $N_r \leq N_0$, plus $R_0 + r$ augmente Plus N_r diminue



D'après la construction de Fresnel

Par Analogie

$tg(\varphi_{x-}\varphi_F) = \dfrac{h\omega}{m\omega^2 \quad -K}$

* $-\pi < \varphi_{x-}\varphi_F < 0$; F(t) est toujours en avance de phase par rapport à x(t)

* T= -K.x , $\varphi_T = \varphi_x + \pi$

$0 < \varphi_{T-}\varphi_F < \pi$; T(t) est toujours en avance de phase par rapport à F(t)

$tg(\varphi_{q-}\varphi_u) = \dfrac{(R0+r)\omega}{L\omega^2 \quad -\frac{1}{C}}$

* $-\pi < \varphi_{q-}\varphi_u < 0$; u(t) est toujours en avance de phase par rapport à q(t)

Impédance mécanique en Kg.S^{-1}

$Z = \dfrac{F_m}{V_m} = \sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{K}{\omega})^2}$

$V_m = \dfrac{F_m}{Z} = \dfrac{F_m}{\sqrt{h^2+(m\omega-\frac{K}{\omega})^2}}$

$Sin(\varphi_{V-}\varphi_F) = \dfrac{\frac{K}{\omega} - m\omega}{Z}$

$Cos(\varphi_{V-}\varphi_F) = \dfrac{h}{Z}$

$tg(\varphi_{V-}\varphi_F) = \dfrac{\frac{K}{\omega} - m\omega}{h}$

Impédance électrique en Ω

$Z = \dfrac{U_m}{I_m} = \sqrt{(R_0 \quad + r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

- $Z \geq (R_0 \quad + r)$

$I_m = \dfrac{U_m}{Z} = \dfrac{U_m}{\sqrt{(R_0 \quad +r)^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$

$Sin(\varphi_{i-}\varphi_u) = \dfrac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{Z}$

$Cos(\varphi_{i-}\varphi_u) = \dfrac{(R_0 \quad +r)}{Z}$

$tg(\varphi_{i-}\varphi_u) = \dfrac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{(R_0 \quad +r)}$

Résonance de vitesse

V_m est maximale , Z est minimale

$m\omega = \dfrac{K}{\omega}$, $\omega = \omega_0$

$Z = h$, $V_m = \dfrac{F_m}{h}$

- **v(t) et F(t) sont en phase**

*** F(t)est en quadrature avance de phase par rapport à x(t)**

*** f(t) = - h.v et F(t) sont en opposition de phase**

La résonance de vitesse se fait toujours à la fréquence propre $N=N_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}}$ quelque soit la valeur de h

Resonance d'intensité

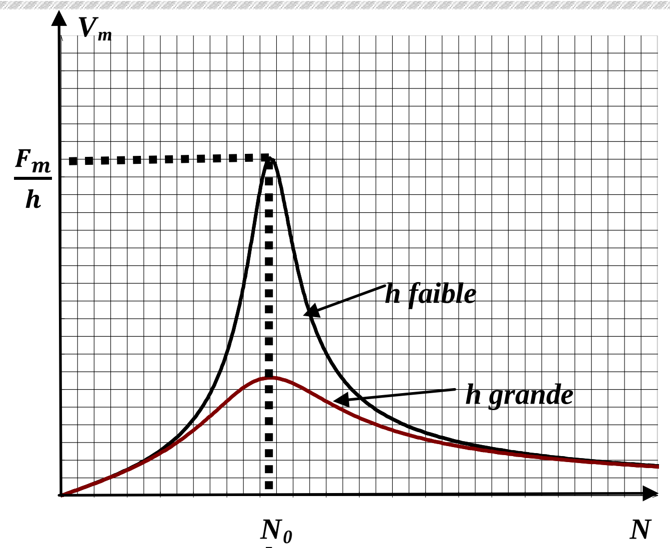
I_m est maximale , Z est minimale

$L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$, $LC\omega^2 = 1$, $\omega = \omega_0$

$Z = R_0 + r$, $I_m = \dfrac{U_m}{R0+r}$

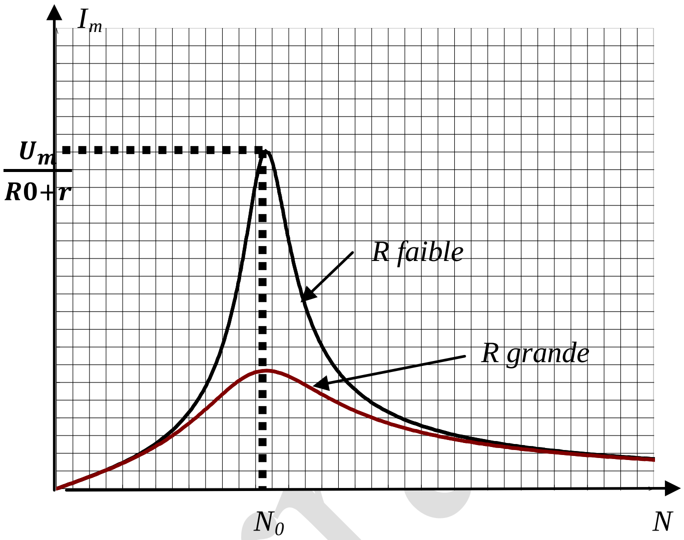
- **i(t) et u(t) sont en phase**
- **u(t)est en quadrature avance de phase par rapport à q(t) (ou u_C (t))**

La résonance d'intensité se fait toujours à la fréquence $N=N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ quelque soit la valeur de R_0+ r



F(t) est en retard de Par rapport à v(t)

F(t) est en avance de Par rapport à v(t)



$N<N_0$
i(t) est en avance de Par rapport à u(t)
Circuit capacitif

$N>N_0$
u(t) est en avance de Par rapport à i(t)
Circuit inductif

Facteur de surtension à la résonance

$$Q=\frac{L\omega_0}{R0+r}=\frac{1}{(R0+r)C\omega_0}=\frac{1}{R0+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Pour des valeurs de L et C données Q est d'autant plus grand que R_0+r est faible

Puissance mécanique moyenne

$$P_m=\frac{F_m\ V_m}{2}\cos(\varphi_v-\varphi_F)=h.\frac{V_m^2}{2}$$

A la résonnance de vitesse il ya aussi résonnance de puissance

Puissance électrique moyenne

$$P_m=U_{eff}\,I_{eff}.\cos(\varphi_i-\varphi_u)=\frac{U_m\ I_m}{2}\cos(\varphi_i-\varphi_u)$$
$$=(R_0+r)I_{eff}^2$$

A la résonnance d'intensité il ya aussi résonnance de puissance