Exercice 1

Les fonctions affines par morceaux f et g sont définies sur l'intervalle $[-1\,;5]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0 \\ -x+3 & \text{si } 0<x\leqslant 3 \\ x-3 & \text{si } 3<x\leqslant 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} & \text{si } 1<x\leqslant 5 \end{cases}$$

1) Tracer séparément les fonctions f et g

2) Calculer les intégrales I et J sur $[-1\,;5]$ de f et g.

3) En déduire les intégrales sur $[-1\,;5]$ des fonction $f+4g$ et $5f-2g$

Exercice 2

Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

1) $f(x)=\dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$; $F(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$; $F(x)=x-\ln(1+e^x)$; $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; $F(x)=\ln(\ln x)$; $I=]1;+\infty[$

4) $f(x)=\cos x-x\sin x$; $F(x)=x\cos x$; $I=\mathbb{R}$

Exercice 3

Montrer que les fonction F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

$$F(x)=\frac{x^2+3x-1}{x-1}\,;\quad G(x)=\frac{x^2+7x-5}{x-1}\,;\quad I=]1;+\infty[.$$

Exercice 4

Linéarité de la primitive

1) $f(x)=x^4-4x^3+x^2-4x+3,\quad I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{3},\quad I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=1-\dfrac{1}{x^3},\quad I=]0;+\infty[$

4) $f(x)=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{4}{x^2}-1,\quad I=]0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{4}{x}+2e^x,\quad I=]0;+\infty[$

www.devoirat.net 2015

Exercice 5

Forme $u'u^n$

1) $f(x) = (x+2)^3, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x(1+x^2)^5, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = 2x(3x^2-1)^3, \quad I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin x \cos x, \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 6

Forme $\dfrac{u'}{u}$

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, \quad I =]4; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, \quad I =]-\infty; 4[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}, \quad I =]0; 1[$

Exercice 7

Forme $\dfrac{u'}{u^n}$, $n \geqslant 2$

1) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}, \quad I =]-4; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}, \quad I = \left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}, \quad I =]-1; 3[$

5) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}, \quad I =]-2; +\infty[$

Exercice 8

Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}, \quad I = \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad I =]1; +\infty[$

Exercice 9

Forme $u'e^u$

1) $f(x) = e^{-x+1}, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2e^{3x-2}, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}, \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 10

Forme $u(ax+b)$

1) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right), \quad I = \mathbb{R}$

www.devoirat.net 2015

Exercice 11

Pour les exercices suivants , trouver la primitive F, de la fonction f, qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1,\ F(2) = 0$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x,\ F(1) = 0$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2},\ F(0) = 0$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{3-x},\ F(1) = 1$

5) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2},\ F(0) = 0$

6) $f(x) = e^{3x+1},\ F(-1) = 0$

7) $f(x) = xe^{-x^2},\ F(\sqrt{\ln 2}) = 1$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1},\ F(2) = 0$

9) $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right),\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

10) $f(x) = \cos x \sin^2 x,\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2},\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Exercice 12

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiquée.

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}\quad I =]-\infty; 1[$

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}\quad I =]-\pi; 0[$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}\quad I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}\quad I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}\quad I =]0; +\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\quad I =]0; +\infty[$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}\quad I =]1; +\infty[$

8) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\quad I = \mathbb{R}$

Exercice 13

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Déterminer une primitive de f à l'aide de la décomposition proposée

1) $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+1}\quad I = \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. Montrer que $f(x) = a + \dfrac{b}{2x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}\quad I =]2; +\infty[$. Montrer que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$

a) $I =]3; +\infty[$ b) $I =]-3; 3[$ c) $I =]-\infty; -3[$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}\quad I =]1; +\infty[$. Montrer que $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$

www.devoirat.net 2015

Exercice 14

calculer les intégrales indiquées

1) $I = \int_0^4 (x-3)\,dx$

2) $I = \int_{-1}^2 (t^2 - 4t + 3)\,dt$

3) $I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right) dt$

4) $I = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$

5) $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$

6) $I = \int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$

Exercice 15

1) $I = \int_0^4 dx$

2) $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\,dx$

3) $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-4}\,dx$

4) $I = \int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,dx$

5) $I = \int_0^1 5e^{3x}\,dx$

6) $I = \int_0^1 te^{t^2-1}\,dt$

Exercice 16

1) a) Trouver trois réel a, b et c tels que : $\frac{4x^2+7x+1}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$

b) En déduire : $I = \int_0^2 \frac{4x^2+7x+1}{x+2}\,dx$

2) a) Prouver que pour tout réel x : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Exercice 17

Comparer, sans les calculer les réels I et J.

1) $I = \int_1^2 x\,e^x\,dx$

2) $J = \int_1^2 x^2\,e^x\,dx$

Exercice 18

Démontrer les encadrements suivants :

1) $2 \leqslant \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant 4$

2) $\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 3$

3) $\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant 1$

4) $2e^{-4} \leqslant \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}\,dx \leqslant 2$

5) $2\ln 3 \leqslant \int_2^4 \ln(x^2-1)\,dx \leqslant 2\ln 3 + 2\ln 5$

www.devoirat.net 2015

Exercice 19

On donne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2\,e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$

a) Déterminer une primitive de f.

b) Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[50\,;100]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2}.

Exercice 20

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

1) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

2) La suite (I_n) est-elle convergente ?

Exercice 21

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$

1) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge t-elle ?

(*Indication* : on montrera que : $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant \dfrac{x}{n+1}$)

Exercice 22

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1) a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

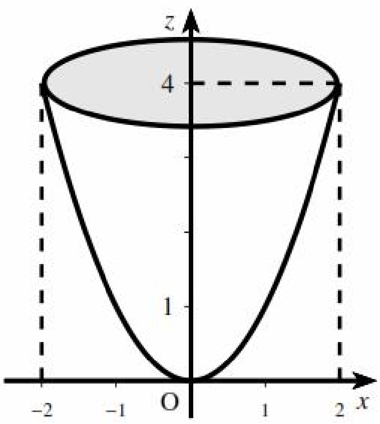
Exercice23

Volume d'un phare

Calculer le volume V du phare ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$z = x^2$$

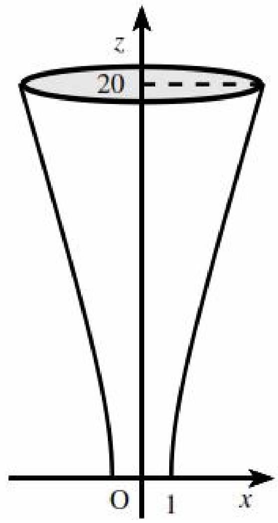
$(0 \leqslant x \leqslant 2)$ dans le plan (xOz) ;
unité 6 cm



www.devoirat.net 2015

Exercice24

Contenance d'un château d'eau

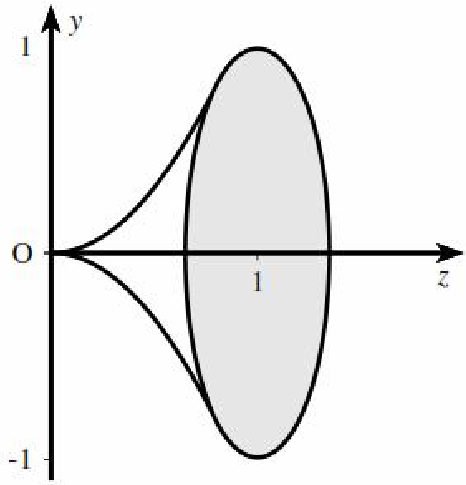


L'intérieur d'un château d'eau a la forme du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de (Oz) la branche d'hyperbole définie par :

$$z = 5\sqrt{x^2 - 1}$$

$0 \leqslant z \leqslant 20$. L'unité étant égale à 2 m, calculer la contenance du château d'eau (en hectolitre).

Exercice 25



Déterminer le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe (Oz) du morceau de parabole d'équation :

$$y = z^2$$

avec $0 \leqslant z \leqslant 1$

www.devoirat.net 2015