1. 1. Calcul de primitives

a. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$;

Correction : $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2x+2}{(x^2+2x)^3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u^3(x)}=\dfrac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{-2}\times(-2)u'(x)u^{-3}(x)$,

$u(x) = x^2 + 2x$, $n - 1 = -3$, $n = -2$, $F(x)=-\dfrac{1}{4}(x^2+2x)^{-2}=-\dfrac{1}{4(x^2+2x)^2}$.

b. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

Correction : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 1$, $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln u(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)+k$.

c. $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}=x-1+\dfrac{1}{x}\times\ln x=x-1+\dfrac{1}{2}\times 2u'(x)\times u(x)$ avec $u(x) = \ln x$,

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}u^2(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+k$.

1. 2. Basique 1

Soit la fonction f, définie par $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$.

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de f telle que $F(\dfrac{3\pi}{2}) = 0$.

Correction

$f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8).\cos x = \cos x \times \sin^2 x - 3\cos x \times \sin x + 8\cos x$;
$u(x) = \sin^3 x$, $u'(x) = 3\cos x \sin^2 x$, $v(x) = \sin^2 x$, $v'(x) = 2\cos x\sin x$, $w(x) = \sin x$, $w'(x) = \cos x$.

$F(x)=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{3}{2}\times\sin^2 x+8\times\sin x+k$.

$F(\dfrac{3\pi}{2})=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\sin^3\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\times\sin^2\dfrac{3\pi}{2}+8\times\sin\dfrac{3\pi}{2}+k=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}-8+k=0\Leftrightarrow k=\dfrac{2+9+48}{6}=\dfrac{59}{6}$.

$F(x)=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{3}{2}\sin^2 x+8\sin x+\dfrac{59}{6}$.

1. 3. Basique 2

1. Montrer que $x^3 + 5x^2 + 7x + 4 = (x + 3)(x^2 + 2x + 1) + 1$.
2. En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}$ sur $]-\infty\,;-1[$.

Correction

$f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}=\dfrac{(x+3)(x^2+2x+1)+1}{x^2+2x+1}=x+3+\dfrac{1}{x^2+2x+1}=x+3+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{1}{x+1}$.

1. 4. Centre de gravité (d'après bac pro)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Partie A : Calcul d'une primitive

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

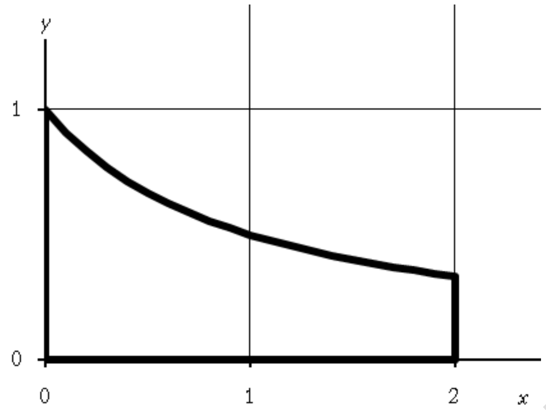
1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 2], $g(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$.

2. En déduire une primitive de g sur l'intervalle [0 ; 2].
Partie B : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène

touati.amin@yahoo.fr

On note f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par : $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

On considère une plaque homogène formée par l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0\le x\le 2$ et $0\le y\le f(x)$. (Voir schéma ci-dessous).



1. Soit S l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Calculer S.
2. Soit G le centre de gravité de la plaque. On admettra que les coordonnées $(X\,;Y)$ de G sont données par les formules suivantes : $X=\frac{1}{S}\int_0^2 xf(x)\,dx$ et $Y=\frac{1}{2S}\int_0^2\left[f(x)\right]^2dx$.

a. Calculer la valeur exacte de X, puis une valeur approchée arrondie au centième.
b. Calculer la valeur exacte de Y, puis une valeur approchée arrondie au centième.

Correction

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

A. 1. $g(x)=1-\frac{1}{x+1}$.

2. $\int g=x-\ln(x+1)$.

B. 1. $S=\int_0^2 g(x)\,dx=2-\ln 3-0+\ln 1=2-\ln 3$.

B. 2. a. $X=\frac{1}{2S}\int_0^2 x\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2S}\int_0^2 x-\frac{x}{x+1}\,dx=\frac{1}{2S}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^2=\frac{\ln 3}{2(2-\ln 3)}\approx 0{,}61$.

b.

$$Y=\frac{1}{2S}\int_0^2\left[f(x)\right]^2dx=\frac{1}{2S}\int_0^2\left[1-\frac{1}{x+1}\right]^2dx=\frac{1}{2S}\int_0^2 1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\frac{1}{2S}\left[x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^2,$$

soit $Y=\frac{1}{2S}\left(2-2\ln 3-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8-6\ln 3}{6(2-\ln 3)}\approx 0{,}26$.

1. 5. QCM 1

Esiee, 2000, question 9

Les résultats suivants sont-ils justes (justifier brièvement les réponses...) ?

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}$. b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt=\frac{1}{2}$.

c) $\int_1^{e}\ln t\,dt=1$. d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt=1$. e) $\int_0^{1}te^t\,dt=1$.

Correction

a) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$. b) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

c) **Vrai** : $\int_1^e \ln t\,dt = \left[t\ln t - t\right]_1^e = 1$. d) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2-1=1$.

e) **Vrai** : Intégration par parties, $\int_0^1 te^t dt = \left[(t-1)e^t\right]_0^1 = 1$.

1. 6. QCM 2

Fesic 2002, exercice 5. Répondre simplement par Vrai ou Faux à chaque question.

On rappelle que 2 < *e* < 3. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{2x}$.

a. La fonction *f* vérifie l'équation $y'(x)-2y(x)=e^{2x}$.

b. L'équation $f(x)=-\frac{1}{16}$ a deux solutions distinctes.

Pour α réel, on pose $I(\alpha)=\int_\alpha^{-1} f(x)dx$.

c. Pour tout réel α, on a : $I(\alpha)=-\frac{1}{4e^2}-\frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}$.

d. On a : $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=+\infty$.

Correction

a. **Vrai :** $f'(x)=e^{2x}+2e^{2x}(x+1)=e^{2x}(2x+3)$, on remplace :

$$f'(x)-2f(x)=e^{2x}(2x+3)-2(x+1)e^{2x}=e^{2x}$$; c'est bon.

b. **Faux** : Inutile d'essayer de résoudre, ça ne peut pas marcher. Regardons les variations de *f* : comme le texte nous le dit si gentiment on a 2<*e*<3, d'où $\frac{1}{8}>e^{-3}>\frac{1}{27}$ et $-\frac{1}{16}<-\frac{1}{2}e^{-3}<-\frac{1}{54}$. Comme le minimum de *f* est supérieur à $-\frac{1}{16}$, l'équation proposée n'a pas de solution.

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}e^{-3}$	↗	$+\infty$

c. **Vrai :** on a tout intérêt à utiliser l'équation différentielle pour calculer $I(\alpha)$: comme $f'(x)=2f(x)+e^{2x}$, en intégrant l'égalité, on a :

$$f(x)=2\int f(x)dx+\frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}=\left(\frac{2x+1}{4}\right)e^{2x}.$$

D'où finalement : $I(\alpha)=\int_\alpha^{-1} f(x)dx=\left[\left(\frac{2x+1}{4}\right)e^{2x}\right]_\alpha^{-1}=-\frac{1}{4}e^{-2}-\frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}=-\frac{1}{4e^2}-\frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}$.

d. **Faux** : $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=-\frac{1}{4e^2}-0=-\frac{1}{4e^2}$ (il faut utiliser $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$).

Rappel : somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q : $u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

1. 7. QCM 3

Soit *f* la fonction définie par $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$.

a. *f* est définie sur $]-1\,;1[$.

b. *f* est croissante sur $]-1\,;1[$.

c. $f(0)=1$.

d. *f* est une fonction paire.

e. En écrivant que $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$, on obtient $f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Correction

a. VRAI : la fonction $\frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $]-1\,;1[$, elle a donc une primitive qui est continue.

b. VRAI : $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}>0$ sur $]-1\,;1[$.

c. FAUX : $f(0)=0$.

d. FAUX : L'intégrale d'une fonction paire est une fonction impaire (à justifier).

e. FAUX : $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\Rightarrow\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{-1}{1-t}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|1+x|$,

soit $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1. 8. Calcul d'intégrales, fonction rationnelle

1. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$, $\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}$.

2. Calculer $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx$.

3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$.

Correction

1. $\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}=\frac{2au^2-au+2bu-b+c}{2u-1}\Rightarrow\begin{cases}2a=1\\2b-a=0\\c-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=1/4\\c=-3/4\end{cases}\Rightarrow f(u)=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}-\frac{3/4}{2u-1}$.

2. $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\frac{2}{2x-1}dx=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\ln|-2-1|\right)$

soit $\frac{3}{8}\ln 3$.

3. La fonction à intégrer ressemble un peu à la précédente en prenant $u=\sin x$:

$f(u)=\frac{u^2-1}{2u-1}\Rightarrow f(\sin x)=\frac{\sin^2 x-1}{2\sin x-1}=\frac{\cos^2 x}{1-2\sin x}$; pour pouvoir intégrer $f(\sin x)$, il faut que ce soit sous la forme $(\sin x)'F'(\sin x)=(\cos x)F'(\sin x)$ où F est une primitive de f. Or on a à intégrer $\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}=\cos x\left[\frac{\cos^2 x}{1-2\sin x}\right]=\cos x\left[\frac{1-\sin^2 x}{1-2\sin x}\right]$ donc tout va bien.

On a finalement $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx=\left[\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{8}\ln|2\sin x-1|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=\frac{3}{8}\ln 2$.

1. 9. Fonction rationnelle, France 2004

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$: $g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I=\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$ avec p et q rationnels.

Correction

1. $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x+1)(x-1)}$ d'où on tire par identification : $\begin{cases}a+b+c=0\\c-b=0\\-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=1\\c-b=0\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1/2\\c=1/2\\a=-1\end{cases}$. On a donc $g(x)=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$.

b. $\int g(x)dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|\Rightarrow G(x)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)$ (ne pas oublier les valeurs absolues au départ, on les supprime par la suite car on est sur $]1\,;+\infty[$).

2. Pour trouver une primitive de $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$, il suffit d'utiliser $\int u'u^n dx=\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$ avec $u=x^2-1$ et $n=-2$: $\int f(x)dx=\dfrac{1}{-2+1}(x^2-1)^{-2+1}=\dfrac{-1}{x^2-1}$.

3. A première vue (et même à seconde vue) il faut intégrer par parties :

$u=\ln x,\ v'=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\Rightarrow u'=\dfrac{1}{x},\ v=\dfrac{-1}{x^2-1}$,

ce qui donne

$$I=\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx=\left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3+\int_2^3\frac{1}{x(x^2-1)}dx$$
$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2+\left(-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 1\right)$$
$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2-\ln 3+\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=-\frac{13}{8}\ln 3+\frac{17}{6}\ln 2.$$

1. 10. ROC, Pondicherry 2005

On considère la fonction f, définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1\,;+\infty[$.

b. Montrer que f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel x_0 de $[1\,;+\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.

a. Que vaut $A(1)$?

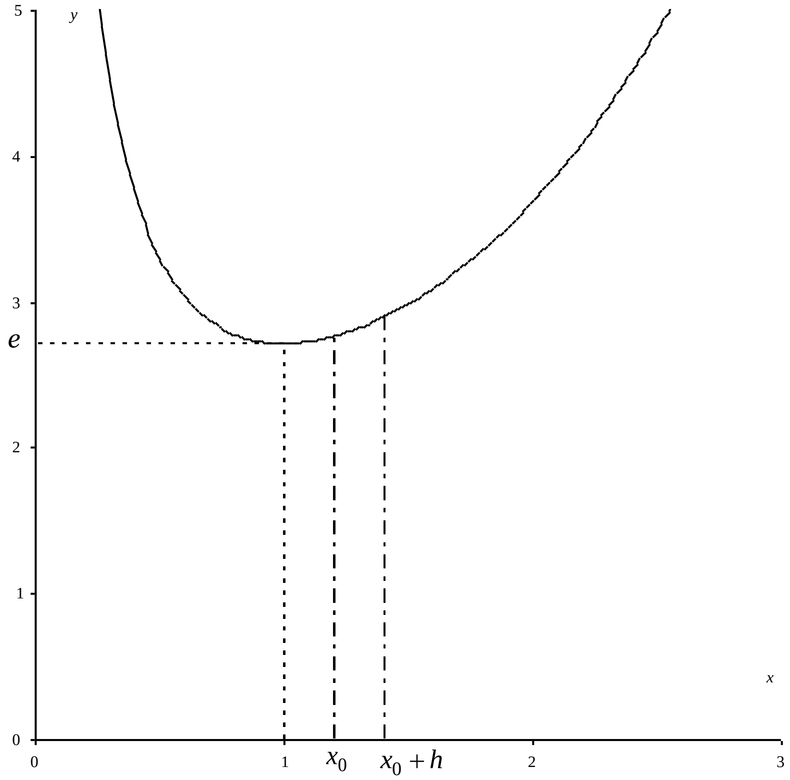
b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\,;+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0)\le\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\le f(x_0+h).$$

c. Lorsque $x_0\ge 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ et tel que $x_0+h\ge 1$?

d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction A ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction A.

e. Conclure.



Correction

1. a. f est continue sur $[1\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

b. $f'(t)=\dfrac{e^t t-e^t}{t^2}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$; e^t et t^2 sont évidemment positifs, $t-1$ l'est également lorsque $t\geq 1$. Donc f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

a. $A(1)$ vaut 0.

b. Sur $[1\,;+\infty[$ f est croissante ainsi que A. La différence $A(x_0+h)-A(x_0)$ représente l'aire de la bande sous la courbe de f, comprise entre les droites $x=x_0$ et $x=x_0+h$: cette bande a une aire supérieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur h, et inférieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0+h)$ et de largeur h. On a donc

$$hf(x_0)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq f(x_0+h)h$$

d'où l'encadrement demandé en divisant par h puisque h est positif.

c. Si on prend $h<0$, ça ne change pas grand-chose sur le fond, il y a surtout des questions de signes à respecter : la bande sous la courbe de f a pour aire $A(x_0)-A(x_0+h)$, le rectangle inférieur a pour aire $f(x_0+h)(-h)$ et le rectangle supérieur a pour aire $f(x_0)(-h)$; on a donc

$(-h)f(x_0+h)\leq A(x_0)-A(x_0+h)\leq(-h)f(x_0)\Leftrightarrow hf(x_0+h)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq hf(x_0)$, soit

$$f(x_0+h)\geq\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)$$

en divisant par h (attention au changement de sens des inégalités : h est négatif).

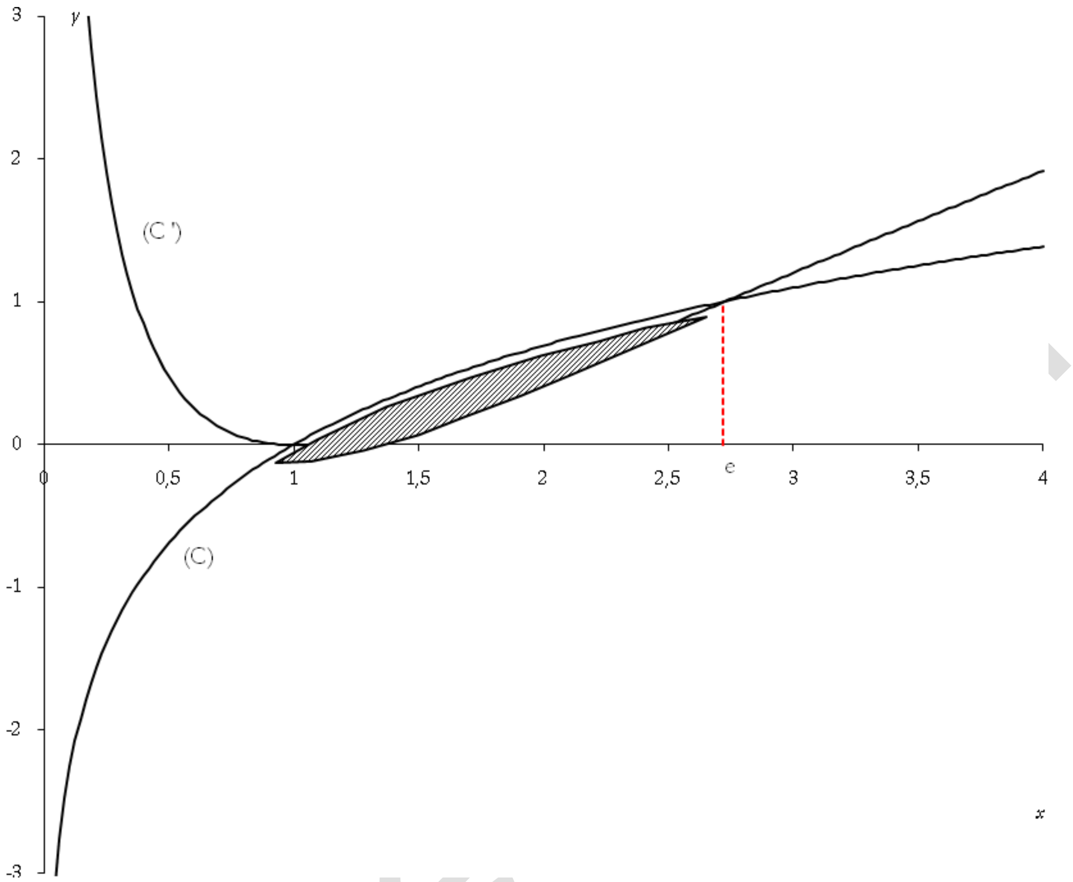
d. On a le même encadrement pour h positif ou négatif, on peut passer à la limite lorsque h tend vers 0, ce qui donne $f(x_0)\geq\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)\Rightarrow A'(x_0)=f(x_0)$ puisqu'on retrouve le nombre dérivé de A au milieu de l'encadrement.

e. Conclusion du cours : l'aire sous la courbe de f entre $x=1$ et $x=x_0$ est obtenue en trouvant une primitive de f (la fonction A) telle que $A(1)=0$.

touati.amin@yahoo.fr

1. 11. Aires, France 06/2008, 5 points

Les courbes (C) et (C') données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, les fonctions *f* et *g* définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.



1. On cherche à déterminer l'aire *A* (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée. On note $I=\int_1^e \ln x\,dx$ et $J=\int_1^e (\ln x)^2\,dx$.

a. Vérifier que la fonction *F* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire *I*.

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=e-2I$.

c. En déduire *J*.

d. Donner la valeur de *A*.

2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

Pour *x* appartenant à l'intervalle [1 ; *e*], on note *M* le point de la courbe (C) d'abscisse *x* et *N* le point de la courbe (C') de même abscisse.

Pour quelle valeur de *x* la distance *MN* est maximale ? Calculer la valeur maximale de *MN*.

Correction

1. a. On dérive : $F'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$ donc *F* est une primitive de ln.

$I=\int_1^e \ln x\,dx=F(e)-F(1)=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=1$.

b & c. Posons $\begin{cases}u=\ln x\\ v'=\ln x\end{cases}$ d'où $\begin{cases}u'=\frac{1}{x}\\ v=x\ln x-x\end{cases}$ et

$J=\int_1^e (\ln x)^2\,dx=\left[x(\ln x)^2-x\ln x\right]_1^e-\int_1^e(\ln x-1)\,dx=0-0-I+[x]_1^e=e-2=e-2I$.

Remarque : on n'a pas besoin de passer par I pour calculer J...

d. $A=I-J=1-(e-2)=3-e$.

2. Comme a priori on ne sait pas qui est au-dessus, il faut prendre la valeur absolue :

$MN=\left|g(x)-f(x)\right|=\left|(\ln x)^2-\ln x\right|=\left|\ln x(\ln x-1)\right|$.

Sur $[1\,;e]$ $\ln x\geq 0$ et $\ln x-1\leq 0$ donc $MN=h(x)=\ln x-(\ln x)^2$. Sa dérivée vaut $\frac{1}{x}-2\frac{1}{x}\ln x=\frac{1-2\ln x}{x}$ qui est nulle pour $x=e^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne la distance maximale $h\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$.

1. 12. Fonction intégrale, Liban 06/2008, 5 points

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$. On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe (C) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2. a. Interpréter graphiquement $g(2)$.

b. Montrer que $0\leq g(2)\leq 2{,}5$.

3. a. Soit x un réel supérieur à 2. Montrer que $\int_2^x f(t)\,dt\geq x-2$. En déduire que $g(x)\geq x-2$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel t, $f(t)=(t-1)e^{-t}+1$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt$.

2. En déduire que pour tout réel x, $g(x)=x\left(1-e^{-x}\right)$.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Correction

Partie A

1. Pas trop dur...

2. a. $g(2)=\int_0^2 f(t)\,dt$; $g(2)$ est l'aire sous la courbe (C) sur l'intervalle $[0\,;2]$.

b. D'après le tableau de variations de f on peut dire que pour tout réel t de $[0\,;2]$, $0\leq f(t)\leq 1+e^{-2}$ et que f est continue sur $[0\,;2]$.

D'après l'inégalité de la moyenne, on a : $0\times(2-0)\leq\int_0^2 f(t)\,dt\leq\left(1+e^{-2}\right)\times(2-0)$, c'est-à-dire $0\leq\int_0^2 f(t)\,dt\leq 2\left(1+e^{-2}\right)$. Or $2\left(1+e^{-2}\right)\approx 2{,}3$ et $g(2)=\int_0^2 f(t)\,dt$. Par conséquent, $0\leq g(2)\leq 2{,}5$.

3. a. Soit x un réel supérieur à 2. D'après le tableau de variations de f, pour $t \geq 2$, $f(t) \geq 1$.

On intègre cette inégalité : $\int_2^x f(t)\,dt \geq \int_2^x 1\,dt = x-2$. De plus, $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt$ d'après la relation de Chasles d'où $g(x) = g(2) + \int_2^x f(t)\,dt$. Comme $g(2) \geq 0$ (d'après la question 2. b.), on en déduit que $g(x) \geq x-2$ pour tout réel x supérieur à 2.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

4. g est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0, $g'(x) = f(x)$. D'après le tableau de variations de f, $f(x) \geq 0$ lorsque $x \geq 0$ donc g est croissante et $f(x) \leq 0$ lorsque $x \leq 0$, g est décroissante.

Partie B

1. $I = \int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt$. Posons $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t-1$; alors $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ et $v'(t) = 1$.

$I = \int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt = \left[-(t-1)e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t}\,dt = \left[-(x-1)e^{-x} - 1\right] - \left[e^{-t}\right]_0^x$ d'où

$$\int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt = \left[-(x-1)e^{-x} - 1\right] - e^{-x} + 1 = -xe^{-x}.$$

2. $g(x) = \int_0^x (t-1)\mathrm{e}^{-t}dt + \int_0^x 1\,dt$ d'après la linéarité de l'intégration.

D'où : $g(x) = -x\mathrm{e}^{-x} + 1 \times (x-0) = x - x\mathrm{e}^{-x}$, donc $g(x) = x\left(1-e^{-x}\right)$, pour tout réel x.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ (limite d'une fonction composée). On en déduit alors que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty$; de plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n = \sin(1)$.

1. 13. Fonction intégrale, Pondicherry 2008, 4 pts

1. Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1\,;\,+\infty[$.

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{e^x-1} = x\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

b. En déduire que $\int_1^3 f(x)\,dx = 3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx$.

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) \leq \ln\left(1-e^{-x}\right) \leq \ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx$, puis de $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Correction

1. a. $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$, $H(x) = \int_1^x f(t)\,dt$: comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $e^x - 1 \neq 0$ donc f existe et est continue sur $\mathbb{R}$; f a donc une primitive F et $H(x) = F(x) - F(1)$ existe sur $\mathbb{R}$.

touati.amin@yahoo.fr

b. Grâce au cours nous savons que $H'(x) = F'(x) - 0 = f(x)$.

c. $H(3)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire,de *f*, l'axe (*Ox*) les droites $x = 1$ et $x = 3$.

2. a. Multiplions $f(x)$ par e^{-x} au numérateur et au dénominateur :

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{(e^x - 1)e^{-x}} = x\frac{e^{-x}}{e^x e^{-x} - e^{-x}} = x\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

b. On reconnaît dans $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ la dérivée de $\ln\left|1 - e^{-x}\right|$; il faut donc intégrer par parties en posant :

$u = x$, $v' = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$, soit $u' = 1$, $v = \ln\left|1 - e^{-x}\right|$; par ailleurs $1 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0$ donc $v = \ln\left(1 - e^{-x}\right)$:

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \left[x\ln\left(1-e^{-x}\right)\right]_1^3 - \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx = 3\ln\left(1-e^{-3}\right) - \ln\left(1-e^{-1}\right) - \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx.$$

c. La fonction $\left(1 - e^{-x}\right)$ est strictement positive si $1 \leq x \leq 3$; $\left(\ln\left(1-e^{-x}\right)\right)' = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} > 0$ donc $\ln\left(1-e^{-x}\right)$ est croissante sur $[1\,;3]$ d'où $\ln\left(1-e^{-1}\right) \leq \ln\left(1-e^{-x}\right) \leq \ln\left(1-e^{-3}\right)$.

d. On intègre : $(3-1)\ln\left(1-e^{-1}\right) \leq \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx \leq (3-1)\ln\left(1-e^{-3}\right)$, soit

$$-2\ln\left(1-e^{-3}\right) \leq -\int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx \leq -2\ln\left(1-e^{-1}\right),$$

d'où $3\ln\left(1-e^{-3}\right) - \ln\left(1-e^{-1}\right) - 2\ln\left(1-e^{-3}\right) \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq 3\ln\left(1-e^{-3}\right) - \ln\left(1-e^{-1}\right) - 2\ln\left(1-e^{-1}\right)$ et

enfin $\ln\left(\frac{1-e^{-3}}{1-e^{-1}}\right) \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq 3\ln\left(\frac{1-e^{-3}}{1-e^{-1}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^3-1}{e^3-e^2}\right) \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq 3\ln\ln\left(\frac{e^3-1}{e^3-e^2}\right)$.

1. 14. Fonction, aire, équation, Polynésie 2006

Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

On définit la fonction *F* sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$.

1. Déterminer les variations de la fonction *F* sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}$.

Partie B

La fonction *f* considérée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$. On appelle *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$.

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions *f* et *g* dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Les courbes sont tracées en annexe.

1. a. Montrer que les variations de la fonction *f* sont bien celles données dans la partie A. On ne demande pas de justifier les limites.

b. Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\left(x^2-1\right)e^{-x}$.

a. Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=\left(-x^2-2x-1\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

b. Soit un réel α supérieur ou égal à 1. On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations x = 1 et x = α. Déterminer l'aire $A(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

c. Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

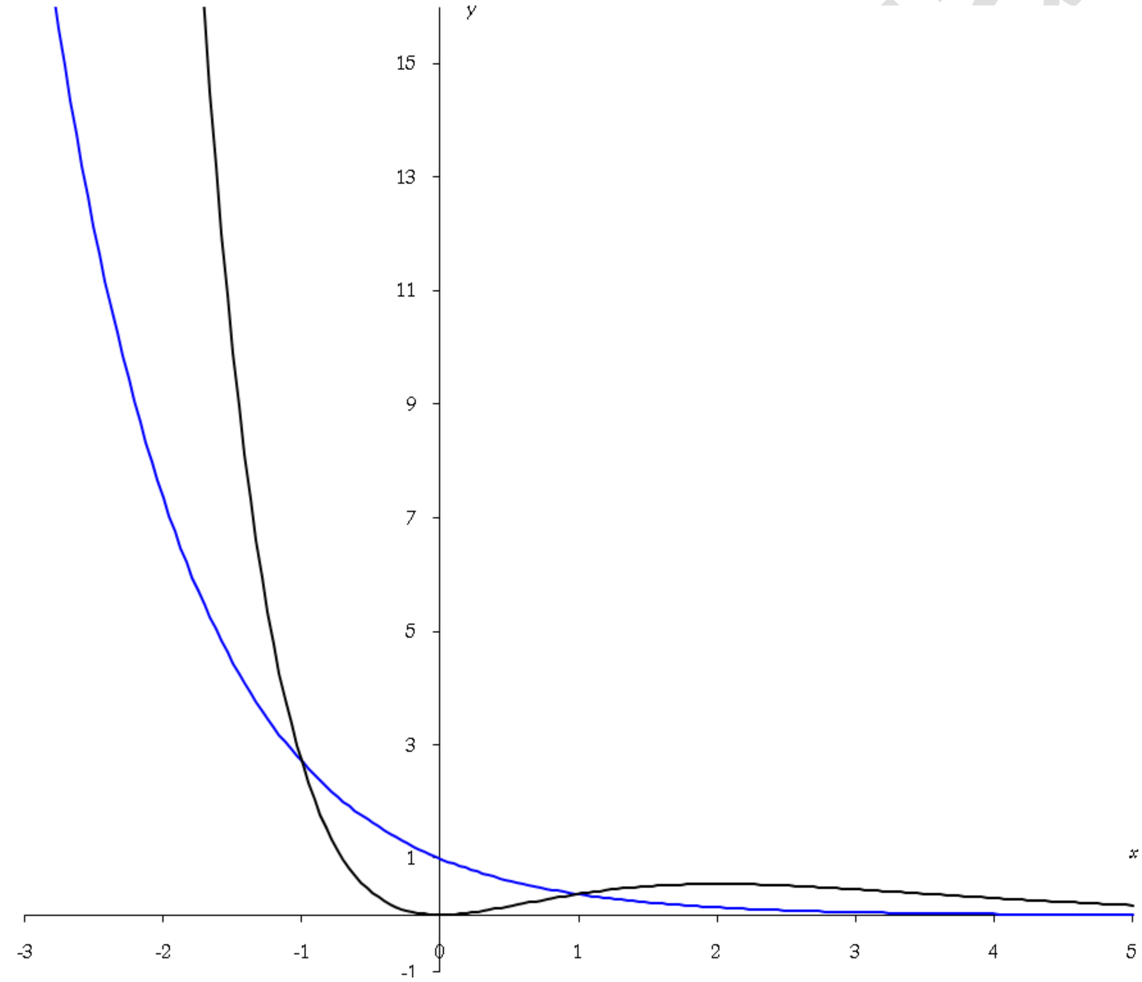
3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation y = m coupe la courbe (C) au point $P(x_P\,;m)$ et la courbe (Γ) au point $Q\,(x_Q\,;m)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P, appartenant à l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

a. Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe) les points P et Q tels que x_P appartienne à $\left]-\infty\,;-1\right]$ et PQ = 1.

b. Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et de x_Q. Justifier l'égalité $f(x_P)=g(x_Q)$.

c. Déterminer la valeur de x_P telle que PQ = 1.



Correction

Partie A

1. $F(x)=\int_2^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$: f est toujours positive donc F est croissante

2. 3 appartient à l'intervalle $[2;+\infty[$, sur cet intervalle f est positive donc $F(3)=\int_2^3 f(t)\,dt \geq 0$; comme $f(t) \leq 4e^{-2}$ sur cet intervalle, en intégrant on a de même : $\int_2^3 f(t)\,dt \leq \int_2^3 4e^{-2}\,dt = (3-2)4e^{-2} = 4e^{-2}$

<u>Partie B</u>

$f(x)=x^2e^{-x}$, $g(x)=e^{-x}$.

1. a. On dérive f : $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$; e^{-x} est toujours strictement positive, f' est du signe de $x(2-x)$, négatif entre les racines 0 et 2, positif à l'extérieur.

b. Signe de $f(x)-g(x)=x^2e^{-x}-e^{-x}=\left(x^2-1\right)e^{-x}=(x-1)(x+1)e^{-x}$.

Donc négatif (C est en dessous de Γ) lorsque $x\in[-1;1]$ et positif (C est au-dessus de Γ) lorsque $x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$.

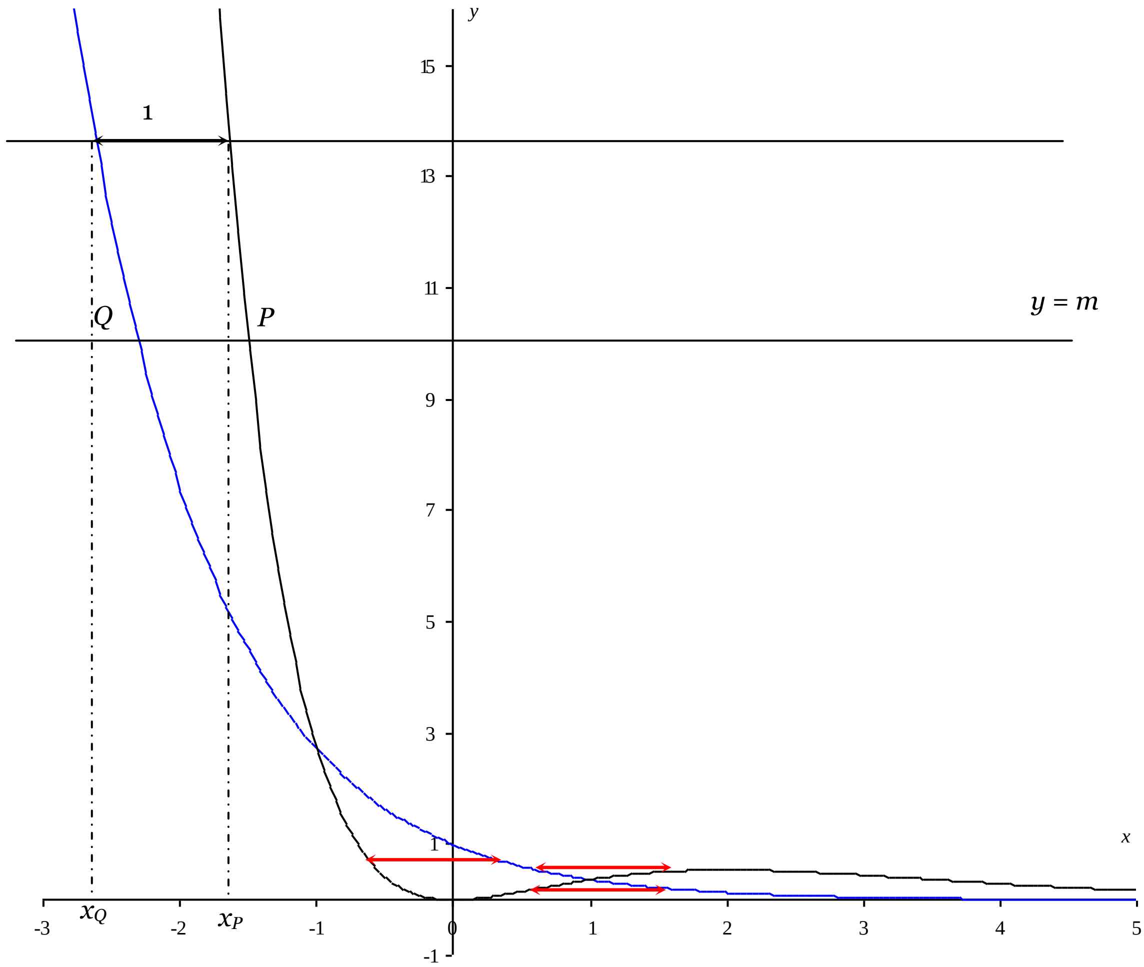
2. $h(x)=\left(x^2-1\right)e^{-x}$.

a. On dérive H : $H'(x)=(-2x-2)e^{-x}-\left(-x^2-2x-1\right)e^{-x}=\left(-2x-2+x^2+2x+1\right)e^{-x}=\left(x^2-1\right)e^{-x}$. Ok.

b. $A(\alpha)=\int_1^\alpha f(x)-g(x)\,dx=\int_1^\alpha h(x)\,dx=H(\alpha)-H(1)=\left(-\alpha^2-2\alpha-1\right)e^{-\alpha}+4e^{-1}$.

c. Les croissances comparées donnent $H(\alpha)$ tend vers 0 en $+\infty$ donc $A(\alpha)$ tend vers $4e^{-1}$.

3. a. Voir la figure (on voit quatre solutions, représentées par 1 flèche noire et 3 flèches rouges qui ne



conviennent pas car x_P n'est alors pas dans $]-\infty\,;-1]$).

b. $PQ=|x_P-x_Q|$; par ailleurs on a $f(x_P)=m=g(x_Q)$ par définition.

c. $PQ=1\Leftrightarrow|x_P-x_Q|=1\Leftrightarrow x_P-x_Q=\pm1\Leftrightarrow x_P=x_Q\pm1$ donc

$$f(x_Q\pm1)=g(x_Q)\Leftrightarrow\begin{cases}(x_Q+1)^2e^{-x_Q}e^{-1}=e^{-x_Q}\Leftrightarrow(x_Q+1)^2=e\Leftrightarrow x_Q+1=\pm\sqrt{e}\Leftrightarrow\begin{cases}x_Q=\sqrt{e}-1\ (>-1)\\x_Q=-\sqrt{e}-1\end{cases}\\(x_Q-1)^2e^{-x_Q}e^{1}=e^{-x_Q}\Leftrightarrow(x_Q-1)^2=e^{-1}\Leftrightarrow x_Q-1=\pm\sqrt{e^{-1}}\Leftrightarrow\begin{cases}x_Q=\sqrt{e^{-1}}+1\ (>-1)\\x_Q=-\sqrt{e^{-1}}+1\ (>-1)\end{cases}\end{cases}$$

La seule solution est donc $x_Q=-\sqrt{e}-1$, $x_P=x_Q+1=-\sqrt{e}-1+1=-\sqrt{e}$.

On vérifie pour f et g : $f(-\sqrt{e})=ee^{\sqrt{e}}=e^{1+\sqrt{e}}$, $g(-\sqrt{e}-1)=e^{1+\sqrt{e}}$, ok.

1. 15. Approximation d'aire, Polynésie 2007

6 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire $\boldsymbol{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

On note M et N les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que f est positive sur $[1\,;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;2]$, le point E est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (MN).

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point E. montrer qu'une équationde (T) est : $y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

a. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout x de $[1\,;2]$.

b. Etudier les variations de g sur $[1\,;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes $MNQP$ et $M'N'QP$.

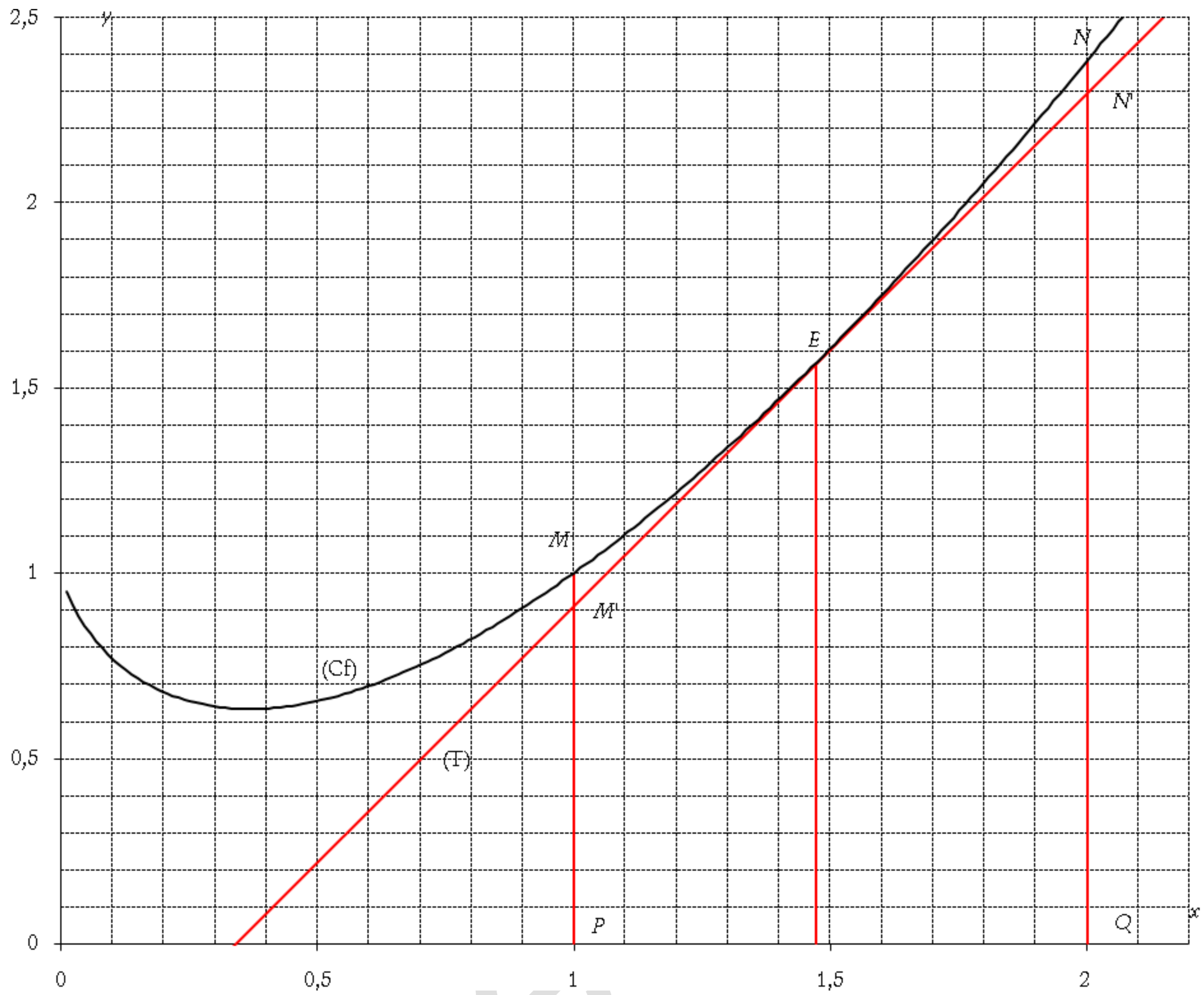
b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\boldsymbol{A}$ d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

2. En déduire la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$.



Correction

Partie A

1\. a. $\ln x > 0$ sur $[1\,;2]$ donc f est positive sur $[1\,;2]$.

b. M a pour coordonnées $(1\,;1)$, N $(2\,;1+2\ln 2)$; le coefficient directeur de la droite (MN) est $\dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \dfrac{-2\ln 2}{-1} = 2\ln 2$.

c. La dérivée de f est : $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$; la tangente à (C_f) est parallèle à (MN) lorsque $\ln x + 1 = 2\ln 2 \Leftrightarrow x = e^{2\ln 2 - 1} = \dfrac{1}{e}\left(e^{\ln 2}\right)^2 = \dfrac{4}{e}$.

d. $y = 2\ln 2\left(x - \dfrac{4}{e}\right) + \left(1 + \dfrac{4}{e}\ln\left(\dfrac{4}{e}\right)\right) = (2\ln 2)x - 2\ln 2 \times \dfrac{4}{e} + 1 + \dfrac{4}{e}\ln 4 - \dfrac{4}{e} = (2\ln 2)x + 1 - \dfrac{4}{e}$ $(\ln 4 = 2\ln 2)$.

2\. Soit g la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \dfrac{4}{e} + 1\right]$.

a. $g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

b. $g'(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{4} \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{4}{e}$.

touati.amin@yahoo.fr

Lorsque $x=\frac{4}{e}$, g est nulle ; donc décroissante jusqu'à $\frac{4}{e}$ puis croissante, le minimum est 0 ; conclusion $g(x)\geq 0$ et (C_f) est au-dessus de (T).

3. a. Il nous faut les ordonnées de M' et N' : $y_{M'}=(2\ln 2)+1-\frac{4}{e}$, $y_{N'}=(4\ln 2)+1-\frac{4}{e}$.

Aire de $MNQP$: $\frac{(PM+QN)}{2}\times PQ=\frac{(y_M+y_n)}{2}\times 1=1+\ln 2\approx 1{,}693$;

aire de $M'N'QP$: $\frac{(PM'+QN')}{2}\times PQ=\frac{(y_{M'}+y_{N'})}{2}\times 1=3\ln 2+1-\frac{4}{e}\approx 1{,}608$;

b. L'aire $\boldsymbol{A}$ est comprise entre ces deux valeurs : 1,6 à 10^{-1} près.

Partie B

1. On pose $u'=x,\ v=\ln x\Rightarrow u=\frac{1}{2}x^2,\ v'=\frac{1}{x}$ d'où

$$\int_1^2 x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}\approx 0{,}636\ .$$

2. $\boldsymbol{A}=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 1dx+\int_1^2 x\ln x\,dx=1+2\ln 2-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+2\ln 2\approx 1{,}636$.

<u>1. 16. Aires, Am. du Nord 2006</u>

5 points

1. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\ln x-\frac{2}{x}$. On donne ci-dessous le tableau de variations de g.

x	0		2,3		x_0		2,4		$+\infty$
g	$-\infty$	↗			0			↗	$+\infty$

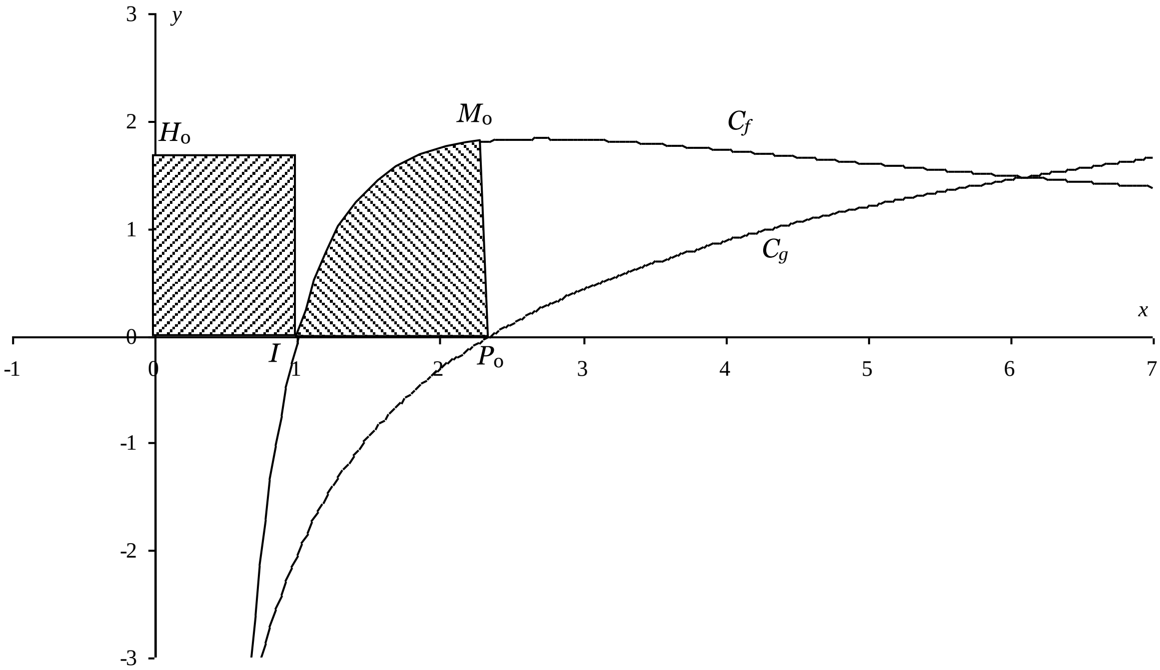
Démontrer **toutes** les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{5\ln x}{x}$.

a. Démontrer que $f(x_0)=\frac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a>1$, exprimer $\int_1^a f(t)\,dt$ en fonction de a.

3. On a tracé dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (C_f) et (C_g). On appelle I le point de coordonnées $(1\,;0)$, P_0 le point d'intersection de (C_g) et de l'axe des abscisses, M_0 le point de (C_f) ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.



On nomme D_1 le domaine plan délimité par la courbe (C_f) et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$. On nomme D_2 le domaine plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines D_1 et D_2 ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.

Correction

1. $g(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$.

x	0	2,3		x_0		2,4	$+\infty$
g	$-\infty$		↗	0	↗		$+\infty$

Limite en 0 : ln tend vers $-\infty$ de même que $-\dfrac{2}{x}$; limite en $+\infty$: ln tend vers $+\infty$, $-\dfrac{2}{x}$ tend vers 0.

$g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}>0$ donc g est croissante ; comme elle est continue, elle s'annule une seule fois.

On a $g(2,3)\approx -0,04$ et $g(2,4)\approx 0,04$ donc $2,3\le x_0\le 2,4$.

2. a. $f(x_0)=\dfrac{5\ln x_0}{x_0}=5\dfrac{2/x_0}{x_0}=\dfrac{10}{x_0^2}$ car $g(x_0)=0 \Leftrightarrow \ln x_0=\dfrac{2}{x_0}$.

b. On se rappelle que la dérivée de $\ln t$ est $\dfrac{1}{t}$ et qu'une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$:

$$\int_1^a f(t)\,dt=5\int_1^a\frac{\ln t}{t}\,dt=5\int_1^a\frac{1}{t}\ln t\,dt=5\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^a=\frac{5}{2}(\ln a)^2-\frac{5}{2}(\ln 1)^2=\frac{5}{2}(\ln a)^2.$$

3. L'abscisse de P_0 est x_0 donc l'ordonnée de M_0 est $f(x_0)=\dfrac{10}{x_0^2}$. L'aire de D_1 est

$\displaystyle\int_1^{x_0} f(t)\,dt=\frac{5}{2}(\ln x_0)^2=\frac{5}{2}\left(\frac{4}{x_0^2}\right)=\frac{10}{x_0^2}=f(x_0)$, soit l'aire du domaine D_2.

Comme $2,3 \le x_0 \le 2,4$, $1,89 \ge \frac{10}{x_0^2} \ge 1,74$...

1. 17. Approcher ln(1+x), Antilles 2004

But de l'exercice : approcher ln(l + a) par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle [0 ; +∞ [.

Soit a dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$; on note $I_0(a)=\int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a)=\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}dt$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.
2. A l'aide d'une intégration par partie, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a.
3. A l'aide d'une intégration par partie, démontrez que $I_{k+1}(a)=\frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1}+I_k(a)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$. Démontrez en calculant I_2(a), I_3(a) et I_4(a), que I_5(a) = ln(1 + a) – P(a).
5. Soit $J(a)=\int_0^a (t-a)^5\,dt$. Calculez $J(a)$.
6. a. Démontrez que pour tout $t\in[0\ ;\ a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\ge (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a\in[0\ ;+\infty[$, $J(a)\le I_5(a)\le 0$.

7. En déduire que pour tout $a\in[0\ ;+\infty[$, $\left|\ln(1+a)-P(a)\right|\le \frac{a^6}{6}$.
8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de ln(1 + a) à 10^{-3} près.

Correction

1. $I_0(a)=\int_0^a \frac{dt}{1+t}=[\ln(1+t)]_0^a=\ln(1+a)-\ln 1=\ln(1+a)$.

2. $I_1(a)=\int_0^a \frac{(t-a)dt}{(1+t)^2}$: intégration par parties, on pose $\begin{cases} u(t)=t-a \\ v'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}\end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\frac{-1}{1+t}\end{cases}$ et

$I_1(a)=\left[\frac{-1(t-a)}{1+t}\right]_0^a-\int_0^a \frac{-dt}{(1+t)}=-a+I_0(a)=\ln(1+a)-a$.

3. Encore une intégration par parties :

$\begin{cases} u(t)=(t-a)^{k+1} \\ v'(t)=\frac{1}{(1+t)^{k+2}}\end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t)=(k+1)(t-a)^k \\ v(t)=\int (1+t)^{-k-2}\,dt=\frac{1}{-k-2+1}(1+t)^{-k-2+1}=\frac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}}\end{cases}$,

d'où $I_{k+1}(a)=\left[\frac{-(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^k}\right]_0^a+\int_0^a \frac{(k+1)(t-a)^k}{(k+1)(1+t)^{k+1}}dt=\frac{(-a)^{k+1}}{k+1}+\int_0^a\frac{(t-a)^k\,dt}{(1+t)^{k+1}}=\frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1}+I_k(a)$.

4. Soit $P(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$; calculons $I_5(a)$ à l'aide de l'égalité précédente :

pour k = 1 : $I_2(a)=\frac{(-1)^2a^2}{2}+I_1(a)=\frac{a^2}{2}+\ln(1+a)-a$,

pour k = 2 : $I_3(a)=\frac{(-1)^3a^3}{3}+I_2(a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+\ln(1+a)-a$,

pour k = 3 : $I_4(a)=\frac{a^4}{4}+I_3(a)=\frac{a^4}{4}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+\ln(1+a)-a$,

pour k = 4 : $I_5(a)=\frac{-a^5}{5}+I_4(a)=\frac{-a^5}{5}+\frac{a^4}{4}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+\ln(1+a)-a=\ln(1+a)-P(a)$.

5. $J(a)=\int_0^a (t-a)^5\,dt=\left[\frac{(t-a)^6}{6}\right]_0^a=-\frac{a^6}{6}$

6. a. Comme $t\le a$, on a $t-a\le 0 \Rightarrow (t-a)^5\le 0$ d'où $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\ge (t-a)^5 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^6}\le 1 \Leftrightarrow (1+t)^6\ge 1$ ce qui est évidemment vrai (remarquez les deux changements de sens des inégalités…).

b. On a $(t-a)^5\le \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}$ donc en intégrant sur l'intervalle [0 ; a] : $\int_0^a (t-a)^5 dt \le \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}dt$ d'où $J(a)\le I_5(a)$; de plus $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\le 0$ et l'intégrale d'une fonction négative sur un intervalle dont les bornes sont rangées dans le sens croissant est négative donc $\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}dt\le 0$, d'où $\int_0^a (t-a)^5 dt \le \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}dt \le 0$.

7. On a d'après 4. $\left|\ln(1+a)-P(a)\right|=\left|I_5(a)\right|\le\left|\int_0^a (t-a)^5\,dt\right|=\frac{a^6}{6}$ (l'inégalité du 6.b. devient $\left|\int_0^a (t-a)^5 dt\right|\ge\left|\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}dt\right|$ du fait du changement de signe).

8. Il suffit de prendre $\frac{a^6}{6}\le 10^{-3}$, soit $a\le\sqrt[6]{6.10^{-3}}\approx 0,426$.

Moralité : pour x dans [0 ; $\sqrt[6]{6.10^{-3}}$], on approche ln(1+ a) par $P(a)$ avec une erreur maximale de 0,001. Ceci est très utile pour calculer les valeurs des logarithmes.

1. 18. Suite intégrales, France 2006

5 points

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^{1-x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour C peut-on en tirer ?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe C.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

b. Calculer I_1, puis I_2.

c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n\le x^n e^{1-x}\le x^n e$.

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

5 points

1. a. $f(x)=x^2e^{1-x}$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ car les deux termes tendent vers $+\infty$.

En $+\infty$, les croissances comparées permettent de dire que l'exponentielle fait tendre f vers 0. On a alors une asymptote horizontale $y=0$.

b. f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=x(2-x)e^{1-x}$.

c. Comme l'exponentielle est positive, f' est du signe de $x(2-x)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$

f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

La représentation graphique est laissée au lecteur.

2. a. Faisons une intégration par parties : $\begin{cases} u = x^{n+1} \\ v' = e^{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = (n+1)x^n \\ v' = -e^{1-x} \end{cases}$ d'où

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx = \left[-x^{n+1}e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x}dx = -1e^0 + 0 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}dx = -1 + (n+1)I_n .$$

b. $I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}dx = -1 + e + \left[-xe^{1-x} \right]_0^1 = e - 2$; par application de la formule de récurrence, on trouve : $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e - 5$.

Remarque : on aurait pu faire calculer $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = -1 + e$ *puis appliquer la formule de récurrence :* $I_1 = -1 + I_0 = -1 + (e-1) = e - 2$ *... on aurait évité une deuxième intégration par parties...*

c. Aire entre la courbe de *f*, l'axe horizontal, $x = 0$ et $x = 1$.

3. a. $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 1 - x \le 1 \Leftrightarrow e^0 \le e^{1-x} \le e^1 \Leftrightarrow x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$ car $x^n > 0$.

b. On intègre l'inégalité entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x}dx \le \int_0^1 x^n e dx \Leftrightarrow \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} \right]_0^1 \le I_n \le e\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} \right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1} ;$$

donc I_n tend vers 0 grâce à nos amis les gendarmes...

1. 19. Intégrales et suites, Am. Nord 06/2008, 4 pts

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$ et $y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt$.

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b. Étudier les variations de la suite (x_n).

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \le \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n$.

Correction

1. a. Pour tout réel t de $[0 ; 1]$, $\cos t > 0$ et $t^n \ge 0$; la fonction $t \mapsto t^n \cos t$ est positive sur l'intervalle $[0 ; 1]$. De plus, cette fonction est continue sur $[0 ; 1]$, par conséquent $\int_0^1 t^n \cos t\, dt \ge 0$, c'est-à-dire que $x_n \ge 0$ pour tout entier naturel n non nul.

b. $x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t\, dt - \int_0^1 t^n \cos t\, dt = \int_0^1 \left(t^{n+1} \cos t - t^n \cos t \right) dt = \int_0^1 \left(t^{n+1} - t^n \right) \cos t\, dt = \int_0^1 t^n (t-1) \cos t\, dt$.

Sur $[0\,;1]$, $t-1\leq 0$, $t^n\geq 0$, $\cos t\geq 0$, la fonction $t\mapsto (t-1)t^n\cos t$ est négative et $\int_0^1 (t-1)t^n\cos t\,dt\leq 0$,

$x_{n+1}-x_n\leq 0$: (x_n) est décroissante.

c. Comme (x_n) est décroissante et minorée par 0, (x_n) est convergente.

2. a. $0<\cos t\leq 1$, soit $0<t^n\cos t\leq t^n$ et $0<\int_0^1 t^n\cos t\,dt\leq \int_0^1 t^n dt$. $\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}\Rightarrow x_n\leq \frac{1}{n+1}$.

b. Comme $0<x_n\leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

3. a. $x_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}\cos t\,dt$. Posons $u'(t)=\cos t$ et $v(t)=t^{n+1}$, alors $u(t)=\sin t$ et $v'(t)=(n+1)t^n$:

$$x_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}\cos t\,dt=\left[t^{n+1}\sin t\right]_0^1-\int_0^1 (n+1)t^{n+1}\sin t\,dt=(\sin(1)-0)-(n+1)\int_0^1 t^{n+1}\sin t\,dt$$

donc $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin(1)$.

b. On a $y_n=\frac{\sin(1)-x_{n+1}}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=0$ (d'après la question 2. b.) d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sin(1)-x_{n+1})=\sin(1)$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$; donc, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$.

4. $y_{n+1}=(n+1)x_n-\cos(1)$.

Alors $nx_n=y_{n+1}-x_n+\cos(1)$; or $\lim\limits_{n\to+\infty}y_{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=\cos(1)$.

On sait que $y_n=\frac{\sin(1)-x_{n+1}}{n+1}$, soit $ny_n=\frac{n}{n+1}(\sin(1)-x_{n+1})$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sin(1)-x_{n+1})=\sin(1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$ $\left(\text{car }\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\right)$, on a par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}ny_n=\sin(1)$.

<u>1. 20. Intégrale et suite 5</u>

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\sin x\,dx$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\cos x\,dx$.

1. Calculer I_0 et J_0

2. En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que $\begin{cases} I_n+nJ_n=1\\ -nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}}\end{cases}$.

3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tend vers $+\infty$.

<u>Correction</u>

1. $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$, $J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

2. On pose par exemple $\begin{cases} u=e^{-nx}\\ v'=\sin x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} u'=-ne^{-nx}\\ v=-\cos x\end{cases}$ d'où

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\sin x\,dx=\left[-e^{-nx}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}ne^{-nx}\cos x\,dx=1-nJ_n\Leftrightarrow I_n+nJ_n=1$. On procède de même pour la deuxième intégrale.

3. On résoud facilement le système : $\begin{cases} I_n+nJ_n=1\\ -n^2I_n+nJ_n=ne^{-n\frac{\pi}{2}}\end{cases}\Rightarrow (1+n^2)I_n=1-ne^{-n\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow I_n=\frac{1-ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$ puis

$$\begin{cases} nI_n + n^2 J_n = n \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow (1+n^2) J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}.$$

4. L'exponentielle l'emporte toujours, donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1-0}{1+\infty} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = 0$.

1. 21. Méthode d'Euler, Am. du Nord 2006

7 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On s'intéresse aux fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant les conditions :

(1) pour tout réel x appartenant à $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = 4 - [f(x)]^2$;

(2) $f(0) = 0$.

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A : étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2. On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse (x_n) et d'ordonnée (y_n) telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0,\ x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0,\ y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}.$$

1. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

b. Placer sur le graphique donné en annexe les points M_n pour n entier nturel inférieur ou égal à 7.

c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0\,;2]$ alors $p(x) \in [0\,;2]$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le y_n \le 2$.

c. Etudier le sens de variation de la suite (y_n).

d. La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B: étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et (C_g) sa courbe représentative.

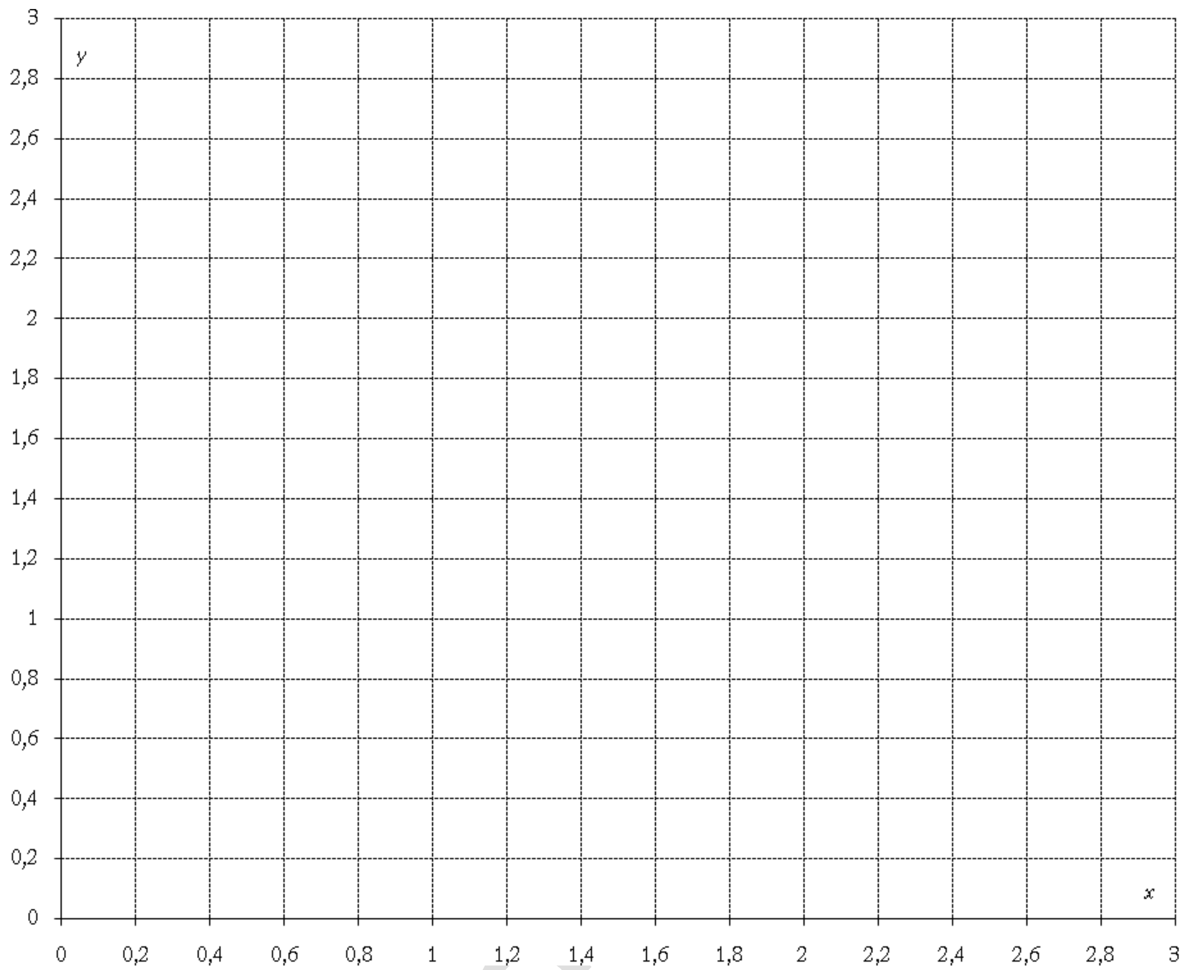
1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. a. Montrer que (C_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b. Etudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (C_g) à l'origine.

4. Tracer dans le repère la courbe (C_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.



Correction

Partie A : étude d'une suite

1. a.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
y_n	0	0,8000	1,4720	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9997

b. Voir ci-dessous

c. La suite (y_n) semble croissante et converger vers 2.

2. a. $p(x)=-0,2x^2+x+0,8$, $p'(x)=-0,4x+1$ qui est positif lorsque $x<\frac{1}{0,4}=2,5$. Donc p est croissante de $[0\,;2]$ vers $[p(0)\,;p(2)]=[0,8\,;2]\subset[0\,;2]$.

b. On a par récurrence $y_0=0\in[0\,;2]$; par ailleurs si $y_n\in[0\,;2]$ alors $y_{n+1}=p(y_n)\in[0\,;2]$ avec ce qu'on a dit en 2. a.

c. $y_1=0,8>y_0$; par récurrence on a alors $p(y_1)>p(y_0)\Leftrightarrow y_2>y_1$, etc. En appliquant p autant de fois que nécessaire on a $y_{n+1}>y_n$ (notez que c'est uniquement le fait que $y_1=0,8>y_0$ qui rend la suite croissante, si c'était le contraire, $y_1<y_0$ alors la suite serait décroissante…).

d. La suite (y_n) est croissante et majorée par 2, elle converge ; sa limite est le point fixe de p dans $[0\,;2]$, à savoir 2.

Partie B: étude d'une fonction

1. $g(0)=2\frac{e^{4\times0}-1}{e^{4\times0}+1}=0$; $g'(x)=2\frac{4e^{4x}\left(e^{4x}+1\right)-4e^{4x}\left(e^{4x}-1\right)}{\left(e^{4x}+1\right)^2}=16\frac{e^{4x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2}$;

touati.amin@yahoo.fr

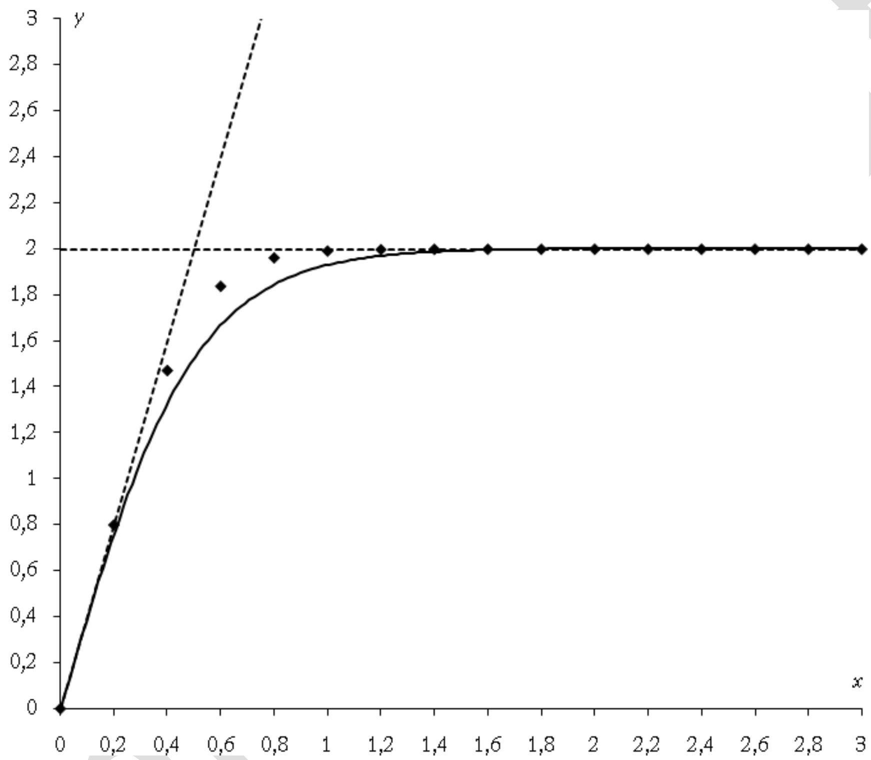
par ailleurs $4-\left[g(x)\right]^2=4-4\frac{\left(e^{4x}-1\right)^2}{\left(e^{4x}+1\right)^2}=4\frac{\left(e^{4x}+1\right)^2-\left(e^{4x}-1\right)^2}{\left(e^{4x}+1\right)^2}=4\frac{2e^{4x}\times 2}{\left(e^{4x}+1\right)^2}=16\frac{e^{4x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2}$.

La fonction g vérifie bien les conditions (1) et (2).

2. a. En $+\infty$ $g(x)=2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ se comporte comme ses termes les plus forts, soit $2\frac{e^{4x}}{e^{4x}}\to 2$; l'asymptote est donc $y=2$. Il n'y a pas d'asymptote verticale car $e^{4x}+1>0$.

b. La dérivée a déjà été calculée au 1. ; elle est positive donc g est croissante.

3. La tangente à $\left(C_g\right)$ à l'origine a pour équation $y=g'(0)(x-0)+g(0)=4x$. Elle coupe Δ en $\left(\frac{1}{2};2\right)$.



1. 22. Equa diff, intégrale, volume, Am. du Sud 2004

3 points

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

(E) $y'+y=0$ et telle que $y(0)=e$.

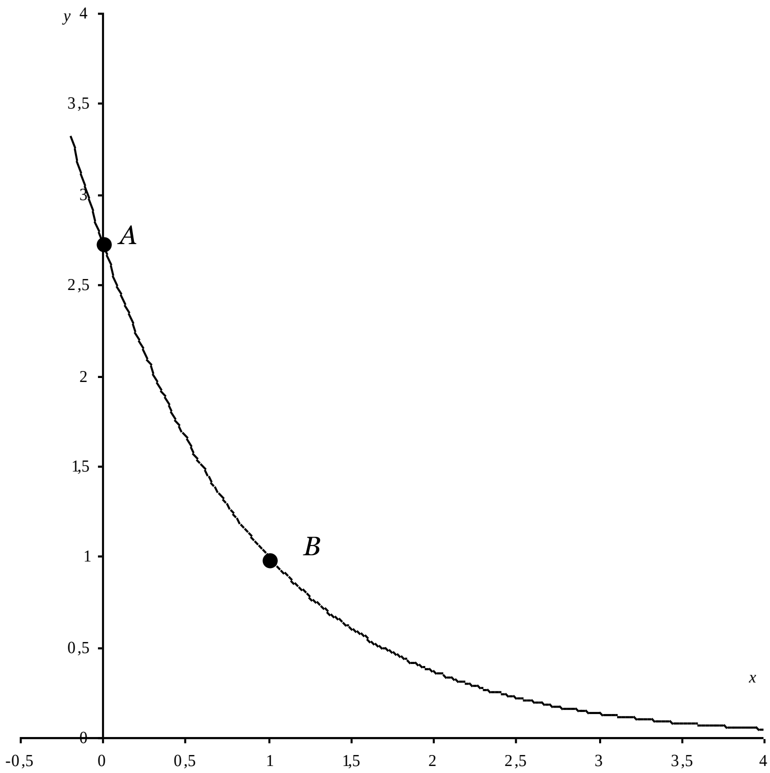
1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

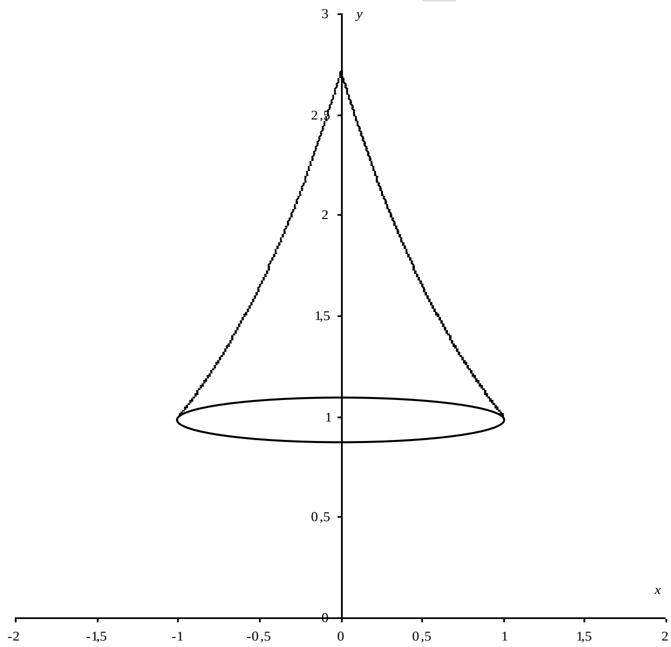
2. Soit t un réel donné de l'intervalle [1 ; e]. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x}=t$ d'inconnue x.

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe AB comme représenté sur la deuxième figure.

On note V son volume et on admet que $V=\pi\int_1^e (1-\ln t)^2\,dt$.

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.





Correction

1. (E) $y'+y=0 \Leftrightarrow y'=-y$ et $y(0)=e$: $f(x)=Ce^{-x}$ et $f(0)=Ce^{0}=C=e$ donc $f(x)=ee^{-x}=e^{1-x}$.

2. $e^{1-x}=t \Leftrightarrow 1-x=\ln t \Leftrightarrow x=1-\ln t$ (on a ainsi la fonction réciproque de f : $f^{-1}(t)=1-\ln t$).

3. $V=\pi\int_{1}^{e}(1-\ln t)^2\,dt$: on pose $u=(1-\ln t)^2$, $v'=1$, d'où $u'=2\left(-\frac{1}{t}\right)(1-\ln t)$ et $v=t$:

$V=\pi\int_{1}^{e}(1-\ln t)^2\,dt=\pi\left[t(1-\ln t)^2\right]_{1}^{e}+2\pi\int_{1}^{e}1-\ln t\,dt=0-\pi+2\pi\int_{1}^{e}1-\ln t\,dt$;

on pose $u=1-\ln t$, $v'=1$, d'où $u'=-\frac{1}{t}$ et $v=t$: $\int_1^e 1-\ln t\,dt=\left[t(1-\ln t)\right]_1^e-\int_1^e -1dt=-1+(e-1)=e-2$ et enfin $V=-\pi+2\pi e-4\pi=\pi(2e-5)\approx 1,37$.

Remarque : on voit sur la figure que le volume en question est quasiment celui d'un cône de base un cercle de rayon 1 et de hauteur 1,5. Comme le volume d'un cône est $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, on a bien environ 1,5.

1. 23. Equa diff + fonction+intégrale, Antilles 2001

11 points

Partie A :Résolution de l'équation différentielle (1) : $y'-2y=xe^x$.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y'-2y=0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)e^x$.

a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b. Montrer que v est solution de l'équation (2) si et seulement si $u+v$ est solution de (1).

c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

d. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2e^x-x-2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

2. Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.

3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6\le\alpha\le-1,5$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.(On pourra mettre e^{2x} en facteur)

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f.

3. Montrer que $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ (On rappelle que $-1,6\le\alpha\le-1,5$).

4. Etablir le tableau de variation de f.

5. Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D : Calcul d'aire

1. Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)\,dx$. (On justifiera la réponse)

2. a. Calculer $\int_m^0 xe^x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. En déduire $\int_m^0 f(x)\,dx$.

3. Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)\,dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

Correction

Partie A

1. L'équation (2) sans second membre a, d'après le cours, pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x\mapsto ke^{2x}$ avec k réel quelconque.

2. a. On a $u'(x)=(ax+b)e^x+ae^x=(ax+a+b)e^x$ donc u est solution de l'équation différentielle (1) $\Leftrightarrow (ax+a+b)e^x-2(ax+b)e^x=xe^x$. Comme $e^x\neq 0$ pour tout réel x, u est solution de l'équation

différentielle (1) $\Leftrightarrow ax+a+b-2ax-2b=x$ c'est à dire si et seulement si , pour tout x réel , $-ax+a-b=x$ soit $\begin{cases}-a=1\\ a-b=0\end{cases} \Rightarrow a=-1$ et $b=-1$.

La fonction u cherchée est donc définie par $u(x) = (-x-1)e^{x}$.

b. On sait que $u'(x)-2u(x)=xe^{x}$, v est solution de (2)

$\Leftrightarrow v'-2v=0 \Leftrightarrow v'-2v+u'-2u=xe^{x} \Leftrightarrow (v'+u')-2(v+u)=xe^{x}$

$\Leftrightarrow (v+u)'-2(v+u)=xe^{x} \Leftrightarrow u+v$ est solution de (1).

Remarque : on peut aussi supposer que v est solution de (2) et en déduire que $u+v$ est solution de (1) puis supposer que $(u+v)$ est solution de (1) et en déduire que v est solution de (2).

c. Soit f une solution de (1). On peut poser $f = u + v$. (On a alors $v = f - u$) . On sait que $u + v$ est solution de (1) $\Leftrightarrow$ v est solution de (2).

Les solutions de (1) sont donc les fonctions f définies par : $x \mapsto -(x+1)e^{x}+ke^{2x}$ ($k \in \mathbb{R}$)

d. On cherche k tel que $f(0)=0$: $f(0)=0 \Leftrightarrow -e^{0}+ke^{0}=0 \Leftrightarrow k=1$. La solution de (1) qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto -(1+x)e^{x}+e^{2x}$

Partie B

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x-2=+\infty$. Ecrivons $g(x)$ en mettant en facteur le terme qui croît le plus vite : $g(x)=e^{x}(2-xe^{-x}-2e^{-x})$. Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $g'(x)=2e^{x}-1=2\left(e^{x}-\frac{1}{2}\right)$.

Signe de $g'(x)$: On a : $e^{x}-\frac{1}{2}\geq 0 \Leftrightarrow e^{x}\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\geq \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\geq -\ln 2$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : ln 2 - 1 $\approx -0,31$, $g\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)=2e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)-2=-1+\ln 2$.

3. a. $g(0)=2e^{0}-0+2=0$ donc 0 est une solution de l'équation $g(x)=0$.

b. D'après le tableau de variation de g, l'autre solution α est dans l'intervalle $]-\infty\,;-\ln 2[$; or sur cet intervalle, g est décroissante. La calculatrice donne : $g(-1,6)\approx 0,004$ et $g(-1,5)\approx -0,054$, par conséquent $g(-1,5)\leq g(\alpha)\leq g(-1,6)$ et donc $-1,6\leq \alpha \leq -1,5$.

4. Etude du signe de $g(x)$: résumons la dans un tableau.

x	$-\infty$		α		$-\ln 2$		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\ln 2-1$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

Partie C :

1. $f(x)=e^{2x}-xe^{x}-e^{x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$, par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

$f(x)=e^{2x}\left(1-xe^{-x}-e^{-x}\right)$: on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut :

$$f'(x)=2e^{2x}-\left[(x+1)e^{x}+1\times e^{x}\right]=2e^{2x}-(x+2)e^{x}.$$

Mettons e^x en facteur pour faire apparaître $g(x)$: $f'(x)=e^x(2e^x-x-2)=e^x g(x)$; comme, pour tout x réel, $e^x>0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

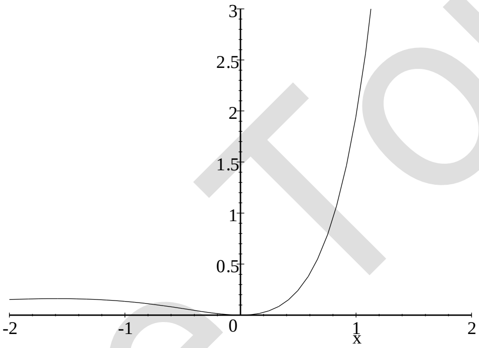
3. On sait que $g(\alpha)=0$ donc $2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ soit $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha+2}{2}$.

On obtient $f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}=\left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)^2-(\alpha+1)\left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)=\dfrac{\alpha^2+4\alpha+4}{4}-\left(\dfrac{\alpha^2+3\alpha+2}{2}\right)$,

soit $f(\alpha)=\dfrac{-\alpha^2-2\alpha}{4}=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$.

4. Nous l'avons déjà donné à la question 2.

5. La courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ et comme tangente en O.



Partie D :

1. Comme $m\le 0$ et que f est positive sur $[m\,;0]$, l'intégrale en question est l'aire de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation ($x=m$) et ($x=0$).

2. a. Faisons, comme suggéré par l'énoncé, une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(x)=x & u'(x)=1 \\ v'(x)=e^x & v(x)=e^x \end{cases}.$$

On en déduit $\displaystyle\int_m^0 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_m^0-\int_m^0 e^x\,dx=-me^m-\left[e^x\right]_m^0=-me^m-\left(1-e^m\right)=(1-m)e^m-1$.

b. On a $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,dx=\int_m^0(e^{2x}-xe^x-e^x)\,dx=\int_m^0(e^{2x}-e^x)\,dx-\int_m^0 xe^x\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\right]_m^0-(1-m)e^m+1$, soit

finalement : $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,dx=\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}e^{2m}+e^m-(1-m)e^m+1=\frac{1}{2}+me^m-\frac{1}{2}e^{2m}$.

3. On sait que $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} me^m=0$ et que $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} e^{2m}=0$ donc $\displaystyle\lim_{m\to-\infty}\int_m^0 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

1. 24. La chaînette

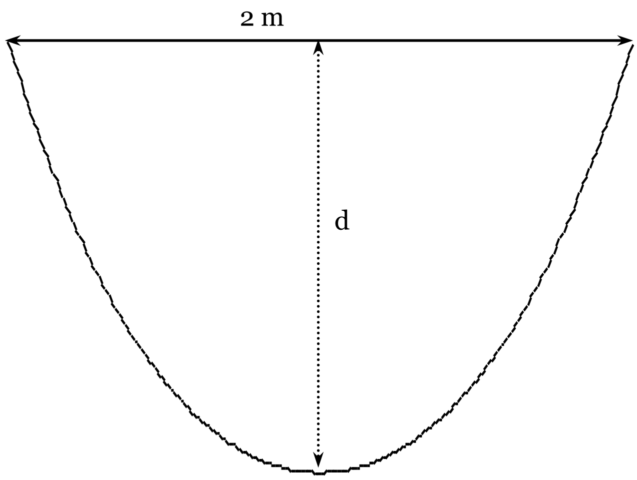
La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible suspendu à ses extrémités à deux points fixes.

On montre et on admettra dans ce problème que, rapportée à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ convenable la chaînette a pour équation

$$y=f_{\lambda}(x)=\frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2\lambda}$$

où λ est un paramètre réel positif dépendant de la longueur du fil. On note C_λ la courbe représentative de f_λ.

On laisse pendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil, c'est-à-dire la distance *d* indiquée sur le schéma.



A. Etude de la chaînette

1. On prend $\lambda = 1$: étudiez les variations de $f_1(x)$; déterminez ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Tracez les courbes C_1, C_2 et C_3 (unité graphique 1 cm).
3. Prouvez que pour tout λ la courbe C_λ se déduit de la courbe C_1 par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Dans toute la suite on prend λ strictement positif.

B. Recherche de *d*

Pour une courbe d'équation $y = f(x)$ un petit élément de courbe a pour longueur ds tel que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, soit

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+[f'(x)]^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

1. Faites un schéma montrant que vous avez compris quelque chose aux explications précédentes et montrez que la longueur de la chaînette est $L(\lambda) = \dfrac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{\lambda}$.
2. Exprimer en fonction de λ la flèche $d(\lambda)$ de la chaînette C_λ.

C. Le problème consiste donc à trouver la valeur de λ pour laquelle $L(\lambda) = 4$

1. Donnez une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation (E) : $L(\lambda) = 4$.
2. On considère la fonction $\varphi(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$. Calculez $\varphi'(t)$ et montrez que $\varphi'(t)$ est toujours positive.

Déterminez la limite de $\varphi(t)$ en $+\infty$ et déduisez-en l'existence d'une unique solution de (E).

3. Déterminez alors les coordonnées du minimum de la fonction $f_\alpha(x)$ ainsi que $d(\alpha)$.

D. Une variante (nettement plus élaborée) de la question précédente est la suivante :

1. Résoudre l'équation d'inconnue X, $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.
2. En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à $\lambda = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1})$.

3. Soit g la fonction définie par $g(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$.

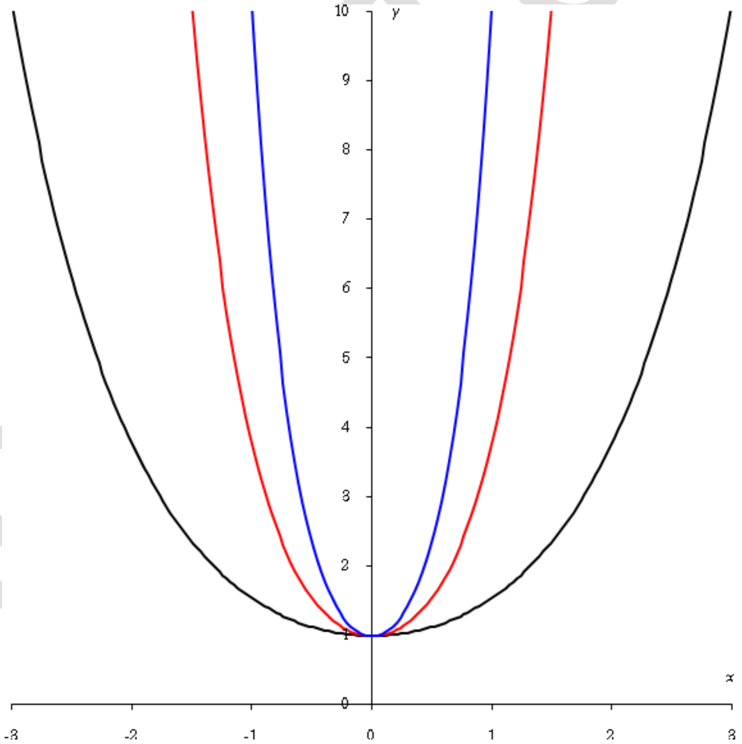
a. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
b. Tracer sa courbe représentative ainsi que la droite D($y = x$).
c. Montrer que l'équation $g(x) = x$ a une seule solution comprise entre 2 et 3.
4. On note $I=[2,+\infty[$.
a. Démontrer que pour tout x de I, $g(x)$ appartient à I.
b. Prouver que pour tout t de I, $0<g'(t)\le 0,5$. En déduire que pour tout x de I, $|g(x)-\alpha|\le 0,5|x-\alpha|$.
5. On considère la suite u_n définie par $u_0=2$ et pour tout $n\ge 0$ $u_{n+1}=g(u_n)$.
a. En utilisant la construction du 3.b. conjecturer le comportement de u_n.
b. Démontrer que pour tout n, $|u_n-a|\le 0,5^n|2-\alpha|$. Conclure quand à la convergence de u_n.
c. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près.
d. Améliorez le résultat obtenu au C.3.

Correction

A. Etude de la chaînette

1. $\lambda=1$, $y=f_1(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x)$; $f_1'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh(x)$;

$e^x-e^{-x}\ge 0\Leftrightarrow e^x\ge e^{-x}\Leftrightarrow x\ge -x\Leftrightarrow x\ge 0$; donc cosh est décroissante avant 0, croissante après.
En fait cosh est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à 0 ; en $+\infty$ la fonction est comme e^x et tend vers $+\infty$. Le minimum est 1 en 0.
2. Merci à l'ordinateur…



3. Essayons une homothétie de centre O, de rapport k (inconnu) sur C_1 ; pour ce faire on écrit analytiquement cette homothétie, soit $M'(x', y')$ en fonction de $M(x, y)$ puis on obtient les coordonnées de M en fonction de celles de M' ; enfin on remplace dans f_1.

$M(x\,;y)\to M'(x'\,;y')\left|\begin{array}{l}x'=kx\\y'=ky\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x=(1/k)x'\\y=(1/k)y'\end{array}\right.$;

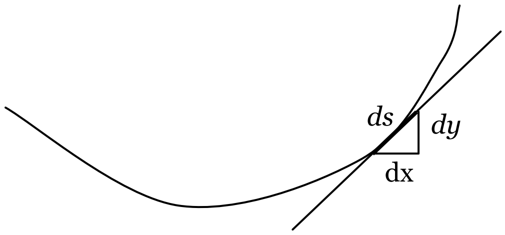
touati.amin@yahoo.fr

remplaçons : $y=f_1(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\to\frac{y'}{k}=\frac{e^{\frac{x'}{k}}+e^{-\frac{x'}{k}}}{2}\Leftrightarrow y'=\frac{e^{\frac{x'}{k}}+e^{-\frac{x'}{k}}}{2\frac{1}{k}}=f_{\frac{1}{k}}(x')$.

Moralité, la courbe $C_{1/k}$, $y=f_{1/k}(x)$, est l'image de C_1 par l'homothétie de centre O de rapport k donc C_λ est l'image de C_1 par l'homothétie de centre O de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

B. Recherche de *d*

1. L'essentiel est dans $ds^2=dx^2+dy^2$: on considère un petit morceau de courbe comme un bout de tangente et cette expression est le théorème de Pythagore à cet endroit.



On a donc $s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ avec $a=-1$, $b=1$ et $f=f_\lambda$:

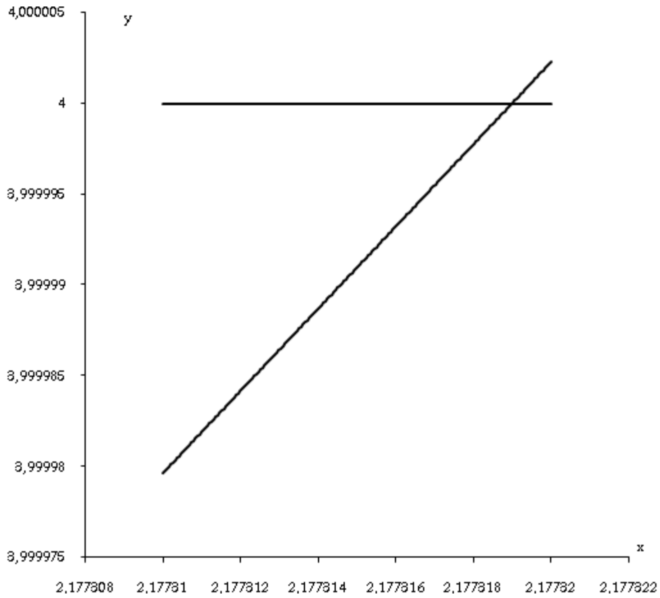
$y=f_\lambda(x)=\frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2\lambda}\Rightarrow f'_\lambda(x)=\frac{\lambda(e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})}{2\lambda}=\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{2}$ qui s'annule en $x=0$; le repère choisi est donc centré sur le sommet de la courbe ; par ailleurs $f_\lambda(0)=\frac{2}{2\lambda}=\frac{1}{\lambda}$, enfin comme la largeur est de deux mètres les extrémités sont aux abscisses -1 et 1 et à l'ordonnée $f_\lambda(1)=f_\lambda(-1)=\frac{e^\lambda+e^{-\lambda}}{2\lambda}$, on a $d(\lambda)=f_\lambda(1)-f_\lambda(0)=\frac{e^\lambda+e^{-\lambda}-2}{2\lambda}$. On a donc :

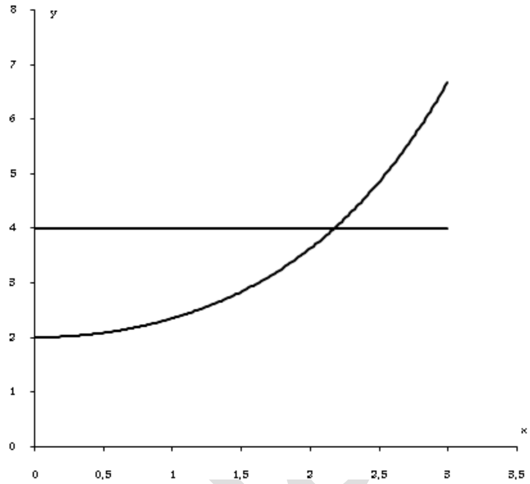
$$L(\lambda)=\int_a^b\sqrt{1+[f'_\lambda(x)]^2}\,dx=\int_{-1}^1\sqrt{1+\left(\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_{-1}^1\sqrt{\frac{4+e^{2\lambda x}-2+e^{-2\lambda x}}{4}}\,dx=\int_{-1}^1\sqrt{\left(\frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2}\right)^2}\,dx$$

d'où $L(\lambda)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})\right]_{-1}^{+1}=\frac{e^\lambda-e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+e^{-\lambda}}{2\lambda}=\frac{e^\lambda-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

2. Comme vu au 1. on a $d(\lambda)=f_\lambda(1)-f_\lambda(0)=\frac{e^\lambda+e^{-\lambda}}{2}-\frac{1}{\lambda}$.

C. 1. $L(\lambda)=4$ à 10^{-4} près vaut 2,1773.





2. $t > 0$, $\varphi(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$, $\varphi'(t)=\dfrac{(e^t+e^{-t})t-(e^t-e^{-t})}{t^2}$. La situation se corse…

Nous allons considérer la fonction $\tanh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ dont la dérivée est $\tanh' t=\dfrac{4}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}$; on a alors

$$(e^t+e^{-t})t-(e^t-e^{-t})=(e^t+e^{-t})\left[t-\tanh t\right] ;$$

posons $u(t)=t-\tanh t$, alors

$$u'(t)=1-\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{(e^t+e^{-t})^2-4}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}\geq 0$$

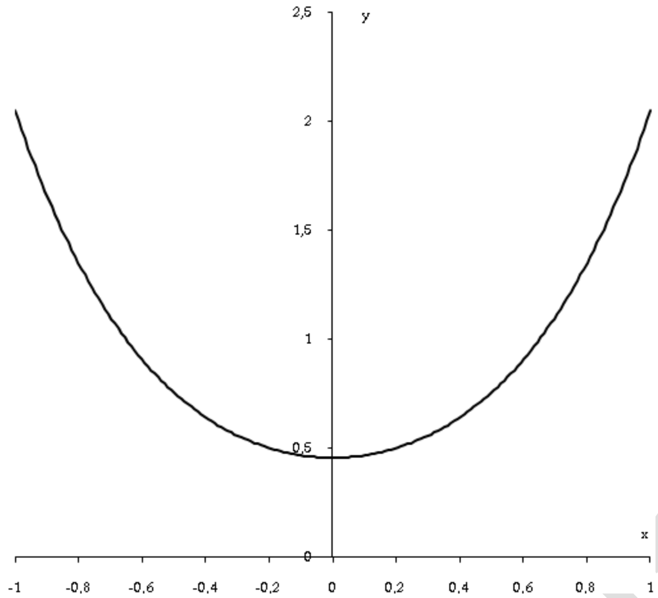
donc u est croissante et $u(t)\geq u(0)=0$. Ouf !!!

Nota bene : lorsqu'on trace la courbe de $\varphi(t)$ on s'aperçoit qu'elle démarre à 2 qui doit donc être la limite de φ en 0. On peut l'obtenir comme suit : $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=\lim\limits_{t\to 0}2e^{-t}\dfrac{e^{2t}-1}{2t}=2$ car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

En $+\infty$ c'est plus simple puisque φ se comporte comme $\dfrac{e^t}{t}$ qui tend vers $+\infty$.

φ est donc continue, monotone strictement croissante de $[0\,;+\infty[$ vers $[0\,;+\infty[$, elle est bijective et l'équation $\varphi(t)=4$ a une seule solution.

3. Le minimum de $f_\alpha(x)$ est en $x = 0$, $f_\alpha(0)=\dfrac{1}{\alpha}\approx\dfrac{1}{2,1773}\approx 0,46$ ce qui donne $d(\alpha)=\dfrac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}=2,052-0,46\approx 1,59$.



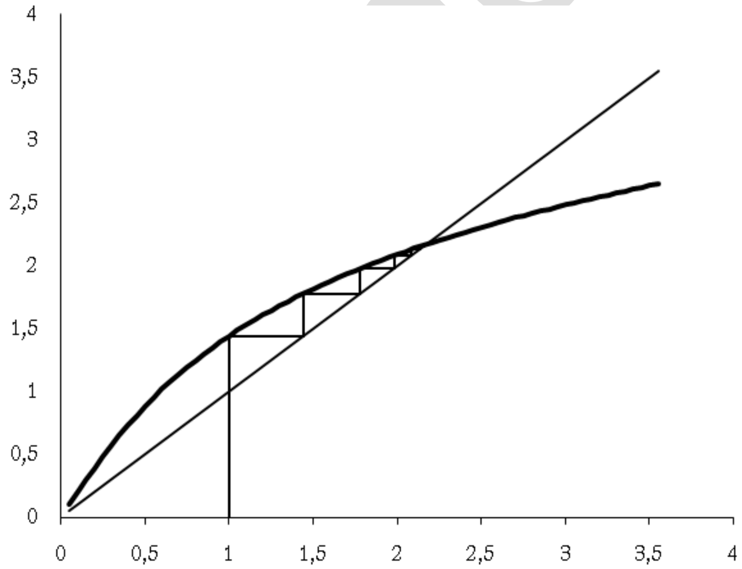
D. 1. $X^2-4\lambda X-1=0$: $\Delta=16\lambda^2+4$, $X_2=2\lambda-\sqrt{4\lambda^2+1}$, $X_1=2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1}$.

2. $L(\lambda)=4$ donne alors $\dfrac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{\lambda}=4 \Leftrightarrow e^{\lambda}+e^{-\lambda}=4\lambda \Leftrightarrow e^{2\lambda}-4\lambda e^{\lambda}+1=0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} X=e^{\lambda} \\ X^2-4\lambda X+1=0 \end{array}\right.$.

Comme λ est positif, on choisit la racine positive, soit $e^{\lambda}=2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1} \Leftrightarrow \lambda=\ln(2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1})$.

3. $g(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$.

a. $g'(x)=\dfrac{\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)'}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{2+\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{2\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}>0$ donc croissante sur ℝ .



x	0		$\sqrt{3}/2$		$+\infty$
v’		+	0	−	
v	0	↗	1,31	↘	

b.
On trace la courbe représentative de g ainsi que la droite D($y=x$) ; sur la figure on a rajouté l’escalier formé par les termes de la suite (question posée en C. 5. a, on part de 1 sur la figure pour mieux voir, … fichier à télécharger : http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/TS_ds7_C.xls)

c. Pour x >0, soit $v(x)=g(x)-x$: $v'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}-1$;

$v'(x)=0 \Leftrightarrow 2=\sqrt{4x^2+1} \Leftrightarrow 4=4x^2+1 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a le tableau de variations ci-contre. On calcule $v(2)\approx 0,1>0$ et $v(3)\approx -0,05<0$ donc v s'annule une seule fois.

4. a. g est croissante, $g(2)\approx 2,094>2$ donc pour tout x, $g(x)$ appartient à I.

b. Pour $0<g'(t)$ c'est évident ; pour $g'(t)\le 0,5$: $t\ge 2 \Rightarrow 4t^2\ge 16 \Rightarrow \sqrt{4t^2+1}>\sqrt{17}>4 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{4t^2+1}}<\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Intégrons cette relation entre x et α :

$0<g'(t)\le 0,5 \Rightarrow 0<\int_x^{\alpha} g'(t)dt \le \int_x^{\alpha} 0,5dt \Rightarrow 0<g(\alpha)-g(x)\le 0,5(\alpha-x)$; on peut recommencer avec x supérieur à α, ce qui donne la relation dans l'autre sens d'où en remarquant que $g(\alpha)=\alpha$, $|g(x)-\alpha|\le 0,5|x-\alpha|$.

5. $u_0=2$, $u_{n+1}=g(u_n)$.

a. La suite est croissante, majorée, convergente vers α.

b. On utilise $|g(x)-\alpha|\le 0,5|x-\alpha|$ avec $x=u_n$, $g(x)=u_{n+1}$ d'où $|u_{n+1}-\alpha|\le 0,5|u_n-\alpha|$. Par récurrence il est immédiat que

$$|u_n-\alpha|\le 0,5|u_{n-1}-\alpha|\le 0,5^2|u_{n-2}-\alpha|\le \ldots \le 0,5^n|u_0-\alpha|=0,5^n|2-\alpha|.$$

Cette dernière suite est géométrique de raison 0,5 ; elle converge donc vers 0 et u_n converge vers α.

c. A la calculatrice on voit que $u_{12}=2,1773...$ et est donc stabilisé à 10^{-4} près de α (voir le fichier). A la main on peut résoudre $0,5^n|2-\alpha|\le 10^{-4}$, ce qui donne une idée.

On a alors $2\le\alpha\le 3 \Rightarrow |2-\alpha|\le 1 \Rightarrow 0,5^n|2-\alpha|\le 0,5^n\le 10^{-4} \Rightarrow n\ge \frac{\ln 10^{-4}}{\ln 0,5}\approx 13,..$ soit $n_0=14$.

d. On peut donc obtenir une valeur très précise de α : 2,17731898496531 pour u_{41} est très bon.

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+y=x-1$.

<u>1. 25. Primitive de ln</u>

Soit la fonction définie sur l'intervalle I =]4 ; $+\infty$ [par :

$$f(x)=-2x+5+3\ln\frac{x+1}{x-4}$$

et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1. Étude de *f*

a. Étudier les limites de la fonction *f* aux bornes de I.

b. Montrer que sur I, $f'(x)$ est strictement négative et dresser le tableau de variation de *f*.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

2. Calcul d'aire

a. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives sur]0 ; $+\infty$ [de la fonction $x \mapsto \ln x$.

b. Montrer que la fonction G : $x \to (x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \ln(x+1)$ sur I.

c. Montrer que la fonction H : $x \to (x-4)\ln(x-4)-x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln(x-4)$ sur I.

d. Déduire des questions précédentes le calcul de l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 5$ et $x = 6$.

On donnera la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

<u>Correction</u>

1. a. Lorsque x tend vers 4, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers $+\infty$ ainsi que $\ln\frac{x+1}{x-4}$ donc *f* tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 1, $\ln\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 0, $-2x+5$ tend vers $-\infty$ donc *f* tend vers $-\infty$.

b. $f'(x)=-2+3\left[\ln\dfrac{x+1}{x-4}\right]'=-2+3\left[\ln(x+1)-\ln(x-4)\right]'=-2+3\left[\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-4}\right]=\dfrac{-2(x+1)(x-4)-15}{(x+1)(x-4)}$.

Lorsque $x > 4$, $x+1$ est positif, $x-4$ est positif donc le numérateur est négatif et le dénominateur est positif. Moralité, f' est négative.

c. $f(x)-(-2x+5)=\ln\dfrac{x+1}{x-4}$; nous avons dit que ce terme tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ donc la droite (D) est une asymptote à (C). Lorsque $x > 4$, $\dfrac{x+1}{x-4}>0$ donc (C) est au-dessus de (D).

2. a. On pose $u=\ln x,\ v'=1\Rightarrow u'=\dfrac{1}{x},\ v=x$ d'où une primitive de $\ln x$ est $x\ln x-\displaystyle\int\frac{1}{x}x\,dx=x\ln x-x$.

b. On dérive G : $G'(x)=1.\ln(x+1)+(x+1)\dfrac{1}{x+1}-1=\ln(x+1)$.

c. Exactement pareil.

d. On cherche $\text{A}=\displaystyle\int_5^6 f(x)-(-2x+5)dx=3\int_5^6\ln(x+1)-\ln(4-x)dx=3[G(6)-G(5)]-3[H(6)-H(5)]$;

$G(6)-G(5)=7\ln 7-6-6\ln 6+5=7\ln 7-6\ln 6-1$, $H(6)-H(5)=2\ln 2-6-1\ln 1+5=2\ln 2-1$

et le résultat $\text{A}=3\left[7\ln 7-6\ln 6-2\ln 2\right]\approx 4,45\ \text{U}$.

<u>1. 26. Equation différentielle</u>

On se propose de déterminer les fonctions dérivables solutions de l'équation différentielle

$$2y'+y=x^2+2x-2 \quad \text{(E)}$$

1. Montrer qu'il existe une fonction polynôme g du second degré solution de (E) et déterminer laquelle.
2. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de l'équation différentielle :

$$2y'+y=0 \quad \text{(E')}$$

3. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
4. Déterminer les solutions dont la représentation graphique passe par l'origine du repère.

<u>Correction</u>

1. On pose $g(x)=ax^2+bx+c$ d'où $2g'+g=4ax+2b+ax^2+bx+c=ax^2+(4a+b)x+2b+c$, soit par identification : $\begin{cases}a=1\\4a+b=2\\2b+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\Rightarrow g(x)=x^2-2x+2\\c=2\end{cases}$.

Vérification, $2y'+y=4x-4+x^2-2x+2=x^2+2x-2$, ok.

2. f est solution de (E) : $2f'+f=x^2+2x-2=2g'+g\Leftrightarrow 2(f'-g')+(f-g)=0\Leftrightarrow 2(f-g)'+(f-g)=0$, on a donc bien $f-g$ est solution de l'équation différentielle : $2y'+y=0$ (E').

3. $y'=-\dfrac{1}{2}y\Rightarrow y=Ce^{-\frac{1}{2}x}$ d'où $f(x)-g(x)=Ce^{-\frac{1}{2}x}\Leftrightarrow f(x)=Ce^{-\frac{1}{2}x}+x^2-2x+2$.

4. On doit avoir $f(0)=0\Leftrightarrow C+2=0\Leftrightarrow C=-2$ et la solution $f(x)=-2e^{-\frac{1}{2}x}+x^2-2x+2$.

<u>1. 27. Equation différentielle et primitive</u>

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+y=x-1$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x e^t(t-1)dt$.

2. Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $f(x)=z(x)e^{-x}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x réel, $z'(x)=e^x(x-1)$.

3. A l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant $z'(x)=e^x(x-1)$.

4. Déduire de la question précédente les solutions de (E). Déterminer la solution pour laquelle l'image de 1 est 0.

<u>Correction</u>

1. On pose $u=t-1,\ v'=e^t\Rightarrow u'=1,\ v=e^t$ d'où

$$\int_1^x e^t(t-1)dt=\left[(t-1)e^t\right]_1^x-\int_1^x e^t dt=(x-1)e^x-0-e^x+e=(x-2)e^x+e.$$

2. $f(x)=z(x)e^{-x}$.

f est solution de (E) :

$$f'+f=x-1\Leftrightarrow z'(x)e^{-x}-z(x)e^{-x}+z(x)e^{-x}=x-1\Leftrightarrow z'(x)e^{-x}=x-1\Leftrightarrow z'(x)=(x-1)e^{x}.$$

3. Il est clair que z est une des primitives de $(x-1)e^{x}$, soit une fonction du type du 1. agrémentée d'une constante : $z(x)=(x-2)e^{x}+e+K$.

4. $f(x)=z(x)e^{-x}\Rightarrow f(x)=x-2+ee^{-x}+Ke^{-x}$; $f(1)=-1+ee^{-1}+Ke^{-1}=Ke^{-1}=0\Rightarrow K=0$.

La solution cherchée est donc $f(x)=x-2+e^{-x+1}$.

1. 28. Equation différentielle : transfusion

Une *exsanguino-transfusion* peut se schématiser de la façon suivante : un récipient R contient un liquide L dans lequel se trouve une substance S dont on veut diminuer la concentration. Le volume de R est de p litres (genre le corps humain…) et la concentration initiale de S est de a gramme par litre dans L.

1. *Première méthode* : on injecte dans R de manière continue du liquide L ne contenant pas la substance S et on prélève simultanément la même quantité de mélange par un tuyau de sortie de sorte que le volume de liquide dans R reste constant. Les tuyaux d'arrivée et de sortie ont des débits de d litres par heure.

On note $m(t)$ la quantité de S dans L au bout du temps t et $C(t)$ sa concentration.

a. Montrer que $m(t+h)-m(t)=-dhC(t)$; en déduire que $m'(t)=-dC(t)$ puis que $C'(t)=-\frac{d}{p}C(t)$ (**E**).

b. Démontrer que l'unique solution de (E) est $C(t)=a\exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$.

c. Au bout de combien de temps la concentration de S est-elle inférieure à 5 % de sa valeur initiale ?

d. Cette méthode permet-elle d'éliminer complètement S ?

2. *Deuxième méthode* : toutes les minutes on prélève dans R un pourcentage fixe q de mélange que l'on remplace par la même quantité de L ne contenant pas S. A la minute n on appelle m_n la masse de S restant dans R et C_n sa concentration.

a. Exprimer en fonction de n et des autres paramètres la masse Δm_n de S prélevée à la minute n.

b. Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n puis C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire C_n en fonction de n, a, p et q.

c. Au bout de combien de minutes la concentration de S est-elle inférieure à 5 % de sa valeur initiale ?

d. En posant $n=60t$ donner une expression de C_n. Comparer au résultat du 1.

Correction

1. *Première méthode* : on note $m(t)$ la quantité de S dans L au bout du temps t et $C(t)$ sa concentration.

a. Pendant la durée h la quantité m de S passe de $m(t)$ à $m(t+h)$; la différence entre les deux est ce qui est sorti pendant ce laps de temps, soit

volume sorti x *concentration* = *débit* x *temps* x *concentration*,

on a donc bien $m(t+h)-m(t)=-dhC(t)$;

divisons tout par h : $\frac{m(t+h)-m(t)}{h}=-dC(t)$;

passons à la limite quand h tend vers 0 : $m'(t)=-dC(t)$.

Par ailleurs à un instant t donné on a $m(t)=pC(t)\Rightarrow m'(t)=pC'(t)$ d'où $C'(t)=-\frac{d}{p}C(t)$ (**E**).

b. On reprend donc le cours et on a $C(t)=K\exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$; comme $C(0)=a$ on en déduit que $K=a$ et $C(t)=a\exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$.

c. On cherche t de sorte que

$$C(t)\le 0,05a\Leftrightarrow a\exp\left(-\frac{d}{p}t\right)\le 0,05a\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{d}{p}t\right)\le 0,05\Leftrightarrow -\frac{d}{p}t\le \ln(0,05)\Leftrightarrow t\ge -\frac{p\ln(0,05)}{d}.$$

d. Pour éliminer complètement S il faudrait que $C(t)$ s'annule à un moment, ce qui est impossible… ceci dit c'est comme pour l'homéopathie, au bout d'un certain temps la quantité restante de S devient tellement faible que l'on peut considérer qu'il n'y en a plus.

2. *Deuxième méthode* : toutes les minutes on prélève dans R un pourcentage fixe q de mélange que l'on remplace par la même quantité de L ne contenant pas S.

a & b. A t = 0 on a $m_0 = ap$, à $t = 1$ mn on a $m_1 = m_0 - qm_0 = ap(1-q)$, puis de minute en minute on multiplie par $1-q$, ce qui donne $m_n = ap(1-q)^n$.

La concentration quand à elle est $C_n = \frac{1}{p}m_n(t) = a(1-q)^n$

c. On a $C_n < 0,05C_0 \Leftrightarrow (1-q)^n < 0,05 \Leftrightarrow n\ln(1-q) \le \ln(0,05) \Leftrightarrow n \ge \dfrac{\ln 0,05}{\ln(1-q)}$.

d. $n = 60t$, soit $C_n = a(1-q)^{60t} = a\exp\left(60t\ln(1-q)\right) = a\exp\left(kt\right)$ avec $k = 60\ln(1-q) = \ln\left[(1-q)^{60}\right]$. Pour que ce soit semblable il faut donc que $\ln\left[(1-q)^{60}\right] = -\dfrac{d}{p}$, soit

$$1-q = \exp\left(-\frac{d}{60p}\right) \Leftrightarrow q = 1-\exp\left(-\frac{d}{60p}\right).$$

Application numérique : p = 5 l, d = 0,1 l/mn, on a alors q = 0,03 %, pour le premier cas t supérieur à 150 mn, pour le deuxième cas n supérieur à 8987 (secondes), soit t supérieur à 150 mn.

1. 29. Equation différentielle : populations

Une étude sur le comportement de bactéries placées dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à proposer une loi d'évolution de la forme

$$N'(t) = 2N(t) - 0,0045\left[N(t)\right]^2 \qquad (1)$$

où t est le temps exprimé en heures. $N(t)$ représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t ; à t = 0 on a $N(0) = 1$ (en milliers).

1. On pose $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$; montrer que y est solution d'une équation différentielle (E) du type $y' = ay+b$.

2. Résoudre (E).

3. En déduire que la solution de (1) est $N(t) = \dfrac{1}{0,99775e^{-2t}+0,00225}$.

4. Etudier les variations de N.

5. Montrer que $N(t) = \dfrac{e^{2t}}{0,99775+0,00225e^{2t}}$. Déduisez-en une primitive de $N(t)$.

6. On appelle *nombre moyen* de bactéries la limite quand T tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T N(t)dt$. Calculer cette intégrale et en déduire le nombre moyen de bactéries dans l'enceinte.

Correction

1. $y(t) = \dfrac{1}{N(t)} \Leftrightarrow N(t) = \dfrac{1}{y(t)} \Rightarrow N'(t) = -\dfrac{y'(t)}{y^2(t)}$. Remplaçons dans (**1**) :

$$N'(t) = 2N(t) - 0,0045N(t)^2 \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{y} - \frac{0,0045}{y^2} \Leftrightarrow y' = -2y + 0,0045.$$

2. On a donc la solution $y(t) = Ce^{-2t} - \dfrac{0,0045}{-2} = Ce^{-2t} + 0,00225$. A t = 0 on a N(0) = 1 d'où y(0) = 1 et donc $1 = C + 0,00225 \Rightarrow C = 0,99775$.

3. La solution pour N est donc $N(t) = \dfrac{1}{y(t)} = \dfrac{1}{0,00225+0,99775e^{-2t}} = \dfrac{e^{2t}}{0,00225e^{2t}+0,99775}$.

4. On a $N'(t)=\dfrac{-\left(0,99775\times -2\times e^{-2t}\right)}{\left(0,00225+0,99775e^{-2t}\right)^2}=\dfrac{1,9955e^{-2t}}{\left(0,00225+0,99775e^{-2t}\right)^2}>0$ donc N est croissante. En $+\infty$ sa limite est $\dfrac{1}{0,00225}\approx 444$.

5. $N(t)=\dfrac{e^{2t}}{0,00225e^{2t}+0,99775}$; $N(t)$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u=0,00225e^{2t}-0,00125$, soit $u'=0,0045e^{2t}$.

On écrit donc $N(t)=\dfrac{1}{0,0045}\dfrac{0,0045e^{2t}}{0,00225e^{2t}+0,99775}$; une primitive de N est alors

$$\frac{1}{0,0045}\ln\left(0,00225e^{2t}+0,99775\right).$$

6. $$\frac{1}{T}\int_0^T N(t)\,dt=\frac{1}{T}\left[\frac{1}{0,0045}\ln\left(0,00225e^{2t}+0,99775\right)\right]_0^T$$
$$=\frac{\ln\left(0,00225e^{2T}+0,99775\right)-\ln(1)}{0,0045T}=\frac{\ln\left(0,00225e^{2T}+0,99775\right)}{0,0045T}$$

Quand T tend vers $+\infty$, $\left(0,00225e^{2T}+0,99775\right)$ est équivalent à $0,00225e^{2T}$ et $\dfrac{\ln\left(0,00225e^{2T}+0,99775\right)}{0,0045T}$ est équivalent à $\dfrac{2T+\ln(0,00225)}{0,0045T}=\dfrac{2}{0,0045}+\dfrac{\ln(0,00225)}{0,0045T}$ qui tend donc vers $\dfrac{2}{0,0045}\approx 444$.

1. 30. Equation différentielle : poursuite

Cet exercice est une (libre) adaptation de Max et Lucie : voir http://promenadesmaths.free.fr/fichiers_pdf/trajectoire_poursuite.pdf

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle $xy''=-R\sqrt{1+y'^2}$ (**E**).

1. a. On considère la fonction $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Etudier les variations de sinh(x).

b. Montrer que pour tout u réel, il existe un unique x tel que sinh(x) = u.

c. Montrer que $x=\sinh^{-1}(u)=\ln(u+\sqrt{u^2+1})$.

d. Montrer que la dérivée de sinh⁻¹(u) est $(\sinh^{-1}(u))'=\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$.

2. a. Montrer que l'équation (**E**) est équivalente à $\dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=-\dfrac{R}{x}$ et donne après intégration

$$\sinh^{-1}(y')=-R\ln x+K$$

où K est une constante.

b. En déduire que $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^K}{x^R}-\dfrac{x^R}{e^K}\right)$.

c. Avec la condition initiale $y'(1)=0$, montrer que $y'=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^R-(x)^R\right]$.

c. Démonstration de cours :

Montrer qu'une primitive de x^m où **<u>m est réel</u>** et différent de –1 est $\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}$.

En déduire que si R est différent de 1 on a $y=\dfrac{1}{2(1-R)}x^{1-R}-\dfrac{1}{2(1+R)}x^{R-1}+K'$ où K' est une constante.

Déterminer la valeur de K' pour que $y(1)$ = 0.

d. Tracez la solution obtenue (on prendra R = 2).

Correction

1. a. $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ qui est toujours positive.

En $+\infty$, sinh tend vers $+\infty$, en $-\infty$ elle tend vers $-\infty$.

b. sinh est continue, monotone strictement croissante de $]-\infty\,;+\infty[$ vers $]-\infty\,;+\infty[$ donc pour tout u on aura un unique x correspondant. sinh est bijective.

c. Il faut résoudre l'équation

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=u\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=2u\Leftrightarrow e^{2x}-2ue^x-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}e^x=X\\X^2-2uX-1=0\end{cases}.$$

On a une équation du seconde degré à résoudre : $\Delta=4u^2+4$ d'où $X_1=\dfrac{2u+2\sqrt{u^2+1}}{2}=u+\sqrt{u^2+1}$ et $X_2=u^2-\sqrt{u^2+1}$; mais comme $e^x=X>0$ la deuxième solution ne convient pas. On a donc

$$x=\sinh^{-1}(u)=\ln(X_1)=\ln(u+\sqrt{u^2+1}).$$

On pouvait également remplacer x par $\ln(u+\sqrt{u^2+1})$ dans $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ et vérifier que le résultat est bien x.

d. Attention à la dérivation des fonctions composées :

$$\left[\ln(u+\sqrt{u^2+1})\right]'=\frac{\left[u+\sqrt{u^2+1}\right]'}{u+\sqrt{u^2+1}}=\frac{u'+\dfrac{\cancel{2}u'u}{\cancel{2}\sqrt{u^2+1}}}{u+\sqrt{u^2+1}}=\frac{\dfrac{u'(u+\sqrt{u^2+1})}{\sqrt{u^2+1}}}{u+\sqrt{u^2+1}}=\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}.$$

Ce résultat peut s'obtenir également en passant par $(f\circ g)'=g'.(f'\circ g)$ et en prenant $g=f^{-1}$; on a alors $\left(f\circ g\right)'(x)=\left(f\circ f^{-1}\right)'(x)=(x)'=1$ et $f'\circ g=f'\circ f^{-1}$ d'où $\left(f^{-1}\right)'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$. Ici ça donne

$$\left(\sinh^{-1}(u)\right)'=u'.\frac{1}{\cosh\left(\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right)}=\frac{2u'}{e^{\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)}+e^{-\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)}}=\frac{2u'}{u+\sqrt{u^2+1}+\dfrac{1}{u+\sqrt{u^2+1}}},$$

soit le résultat demandé car

$$u+\sqrt{u^2+1}+\frac{1}{u+\sqrt{u^2+1}}=u+\sqrt{u^2+1}+\frac{u-\sqrt{u^2+1}}{u^2-u^2-1}=2\sqrt{u^2+1}.$$

2. a. On a (**E**) $xy''=-R\sqrt{1+y'^2}\Leftrightarrow\dfrac{xy''}{\sqrt{1+y'^2}}=-R\Leftrightarrow\dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=-\dfrac{R}{x}\Rightarrow\sinh^{-1}(y')=-R\ln x+K$.

b. On applique sinh des deux côtés :

$$\sinh\left[\sinh^{-1}(y')\right]=\sinh\left[-R\ln x+K\right]\Leftrightarrow y'=\frac{1}{2}\left(e^{-R\ln x+K}-e^{R\ln x-K}\right)=\frac{1}{2}\left(e^Ke^{\ln x^{-R}}-e^{-K}e^{\ln x^R}\right)=\frac{1}{2}\left(e^Kx^{-R}-\frac{1}{e^K}x^R\right)$$

et finalement $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^K}{x^R}-\dfrac{x^R}{e^K}\right)$.

c. $y'(1)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^K}{1}-\dfrac{1}{e^K}\right)=0\Leftrightarrow e^K=\dfrac{1}{e^K}\Leftrightarrow e^{2K}=1\Leftrightarrow 2K=0\Leftrightarrow K=0$. D'où $y'=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x^R}-x^R\right]$.

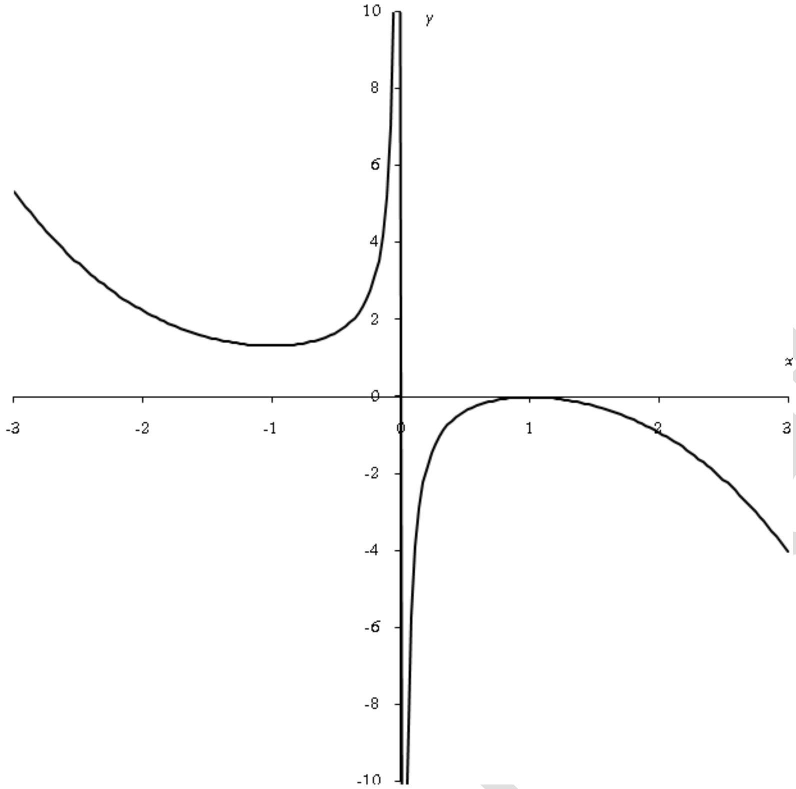
3. a. Démonstration de cours :utiliser $x^m=e^{m\ln x}$ ...

b. On intègre : $y'=\dfrac{1}{2}\left[x^{-R}-x^R\right]\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1-R}x^{1-R}-\dfrac{1}{1+R}x^{R+1}\right]+K'$.

$$y(1)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-R}1^{1-R}-\frac{1}{1+R}1^{R+1}\right]+K'=0\Rightarrow K'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+R}-\frac{1}{1-R}\right]=\frac{-R}{1-R^2}.$$

c. La solution obtenue est $y(x)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1-R}x^{1-R}-\dfrac{1}{1+R}x^{R+1}\right]+\dfrac{R}{R^2-1}$, soit avec R = 2 :

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^3\right]+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2x}-\frac{1}{6}x^3+\frac{2}{3}.$$



On vérifie bien les conditions initiales…

1. 31. Eq. différentielle : désintégrations successives

partie A

La désintégration radioactive du Zirconium 95 (^{95}Zr) se fait en deux étapes : formation de Niobium radioactif (^{95}Nb) puis transformation du Niobium qui conduit à un isotope stable. On s'intéresse à l'évolution du ^{95}Nb en fonction du temps.

À l'instant t (exprimé en jours), on note $Z(t)$ le nombre d'atomes de ^{95}Zr et $N(t)$ le nombre d'atomes de ^{95}Nb.

La fonction $Z(t)$ est solution de l'équation différentielle $Z'(t)=-0{,}02Z(t)$ avec $Z(0)=Z_0$.

1. Donner l'expression de $Z(t)$ en fonction de t et de Z_0. Quel est le sens de variation de Z ?

2. Pendant que Z décroit, N croît et est solution de l'équation différentielle $N'(t)=Z(t)-0{,}01N(t)$ avec $N(0)=0$.

a. On pose $N(t)=f(t)e^{-0{,}01t}$. Montrer que $f'(t)=Z_0e^{-0{,}01t}$.

b. En déduire que $N(t)=100Z_0\left(e^{-0{,}01t}-e^{-0{,}02t}\right)$.

Partie B

On prend $Z_0=2$, de sorte que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'expression de $N(t)$ est :

$$N(t)=200\left(e^{-0{,}01t}-e^{-0{,}02t}\right).$$

On note C la courbe représentative de la fonction N dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 10 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $N(0)$.

2. a. Calculer la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

3. a. Montrer que la fonction N' dérivée de N vérifie $N'(t)=200e^{-0{,}02t}\left(0{,}02-0{,}01e^{0{,}01t}\right)$.

b. Résoudre l'équation $N'(t)=0$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution t_0 de cette équation.

c. Résoudre dans [0 ; $+\infty$ [l'inéquation $N'(t)\geq 0$. En déduire le tableau de variations de la fonction *N*. Préciser la valeur exacte de $N(t_0)$.

4. Construire la courbe C sur l'intervalle [0 ; 150].

5. a. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pour lequel $N(t)\geq 40$. (On laissera apparaître sur la figure les constructions utiles).

b. Résoudre l'inéquation $N(t)\geq 40$ par le calcul (on pourra poser $X=e^{-0,01t}$).

Correction

Partie A

1. $Z'(t)=-0,02Z(t)$, $Z(0)=Z_0$: on applique le cours, $Z(t)=Ce^{-0,02t}$; avec $Z(0)=Z_0$, on a $C=Z_0$ et $Z(t)=Z_0e^{-0,02t}$. La fonction $Z(t)=Z_0e^{-0,02t}$ est décroissante : $Z'(t)=-0,02Z_0e^{-0,02t}<0$.

2. a. $N(t)=f(t)e^{-0,01t}\Rightarrow N'(t)=f'(t)e^{-0,01t}-0,01f(t)e^{-0,01t}$ d'où en remplaçant :

$N'(t)=Z(t)-0,01N(t)\Leftrightarrow f'(t)e^{-0,01t}-0,01f(t)e^{-0,01t}=Z_0e^{-0,02t}-0,01f(t)e^{-0,01t}$, soit finalement :

$$f'(t)e^{-0,01t}=Z_0e^{-0,02t}\Leftrightarrow f'(t)=Z_0e^{-0,02t}e^{0,01t}=Z_0e^{-0,01t}.$$

b. On intègre $f'(t)=Z_0e^{-0,01t}$: $f(t)=\frac{1}{-0,01}Z_0e^{-0,01t}+K=-100Z_0e^{-0,01t}+K$ puis on remplace dans *N* :

$N(t)=f(t)e^{-0,01t}=\left[-100Z_0e^{-0,01t}+K\right]e^{-0,01t}=-100Z_0e^{-0,02t}+Ke^{-0,01t}$.

Comme $N(0)=0$, on a $-100Z_0+K=0\Leftrightarrow K=100Z_0$ et finalement en mettant $100Z_0$ en facteur :

$$N(t)=100Z_0\left(e^{-0,01t}-e^{-0,02t}\right).$$

Partie B $N(t)=200\left(e^{-0,01t}-e^{-0,02t}\right)$.

1. $N(t)=200\left(e^{0}-e^{0}\right)=0$.

2. a. Lorsque *t* tend vers $+\infty$, $e^{-0,01t}$ et $e^{-0,02t}$ tendent vers 0 car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

b. La courbe C a une asymptote horizontale en $+\infty$: $y=0$.

3. a. $N'(t)=200\left(-0,01e^{-0,01t}+0,02e^{-0,02t}\right)=200e^{-0,02t}\left(-0,01e^{0,01t}+0,02\right)$.

b. $N'(t)=0\Leftrightarrow 200e^{-0,02t}\left(0,02-0,01e^{0,01t}\right)=0$ or $e^{-0,02t}$ n'est jamais nulle, donc on résoud :

$0,02-0,01e^{0,01t}=0\Leftrightarrow -0,01e^{0,01t}=-0,02\Leftrightarrow e^{0,01t}=\frac{-0,02}{-0,01}=2\Leftrightarrow 0,01t=\ln 2\Leftrightarrow t=100\ln 2\Rightarrow t_0\approx 69,3$.

c. $e^{-0,02t}$ est toujours strictement positif, on résoud donc

$0,02-0,01e^{0,01t}\geq 0\Leftrightarrow -0,01e^{0,01t}\geq -0,02\Leftrightarrow e^{0,01t}\leq\frac{-0,02}{-0,01}=2\Leftrightarrow 0,01t\leq\ln 2\Leftrightarrow t\leq 100\ln 2$.

Par ailleurs $N(t_0)=200\left(e^{-0,01\times 100\ln 2}-e^{-0,02\times 100\ln 2}\right)=200\left(e^{-\ln 2}-e^{-2\ln 2}\right)=200\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=50$.

On a donc le tableau

t	0		100ln2		$+\infty$
$N'(t)$		+	0	−	
$N(t)$	0	↗	50	↘	0

4.

5. a. Comme on le voit ci-dessus et avec l'aide de la calculatrice, on a $N(t)\geq 40$ lorsque $32,2\leq t\leq 128,7$.

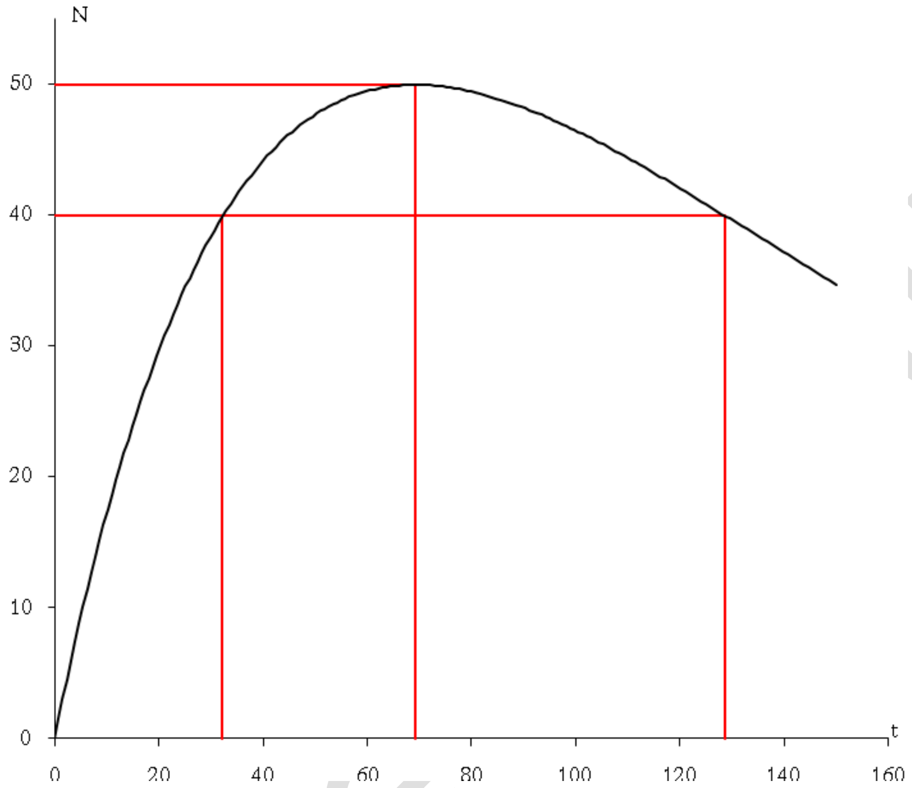
b. $N(t)\geq 40\Leftrightarrow 200\left(e^{-0,01t}-e^{-0,02t}\right)\geq 40\Leftrightarrow e^{-0,01t}-e^{-0,02t}-0,2\geq 0\Leftrightarrow e^{-0,02t}-e^{-0,01t}+0,2\leq 0$.

touati.amin@yahoo.fr

On pose donc $X=e^{-0,01t}$, ce qui donne $X^2-X+0,2\le 0$; les racines sont $X_1=\dfrac{1+\sqrt{0,2}}{2}, X_1=\dfrac{1-\sqrt{0,2}}{2}$, soit l'intervalle solution :

$$X_1\le X\le X_2 \Leftrightarrow X_1\le e^{-0,01t}\le X_2 \Leftrightarrow \ln X_1\le -0,01t\le \ln X_2 \Leftrightarrow -100\ln X_1\ge t\ge -100\ln X_2 .$$

Le calcul donne alors $-100\ln X_2\approx 32,35$ et $-100\ln X_1\approx 128,59$.



1. 32. Equation différentielle ROC

5 points

1. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on sait que les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions de la forme $f(x)=Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$.

b. En faisant un changement de variable de la forme $y=\varphi(Y)$ dans l'équation précédente on obtient l'équation $Y'=2aY+2b\sqrt{Y}$. Quelle est la fonction φ à votre avis ?

2. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) : $y'+y=2e^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y'+y=0$.

On considère l'équation différentielle (1) : $y'+y=2e^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$. Trouver les valeurs de α et β telles que h soit solution de l'équation (1).

3. On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g+h$, où g désigne une solution de l'équation (2).

a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

b. Déterminer la solution f de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $f(0)=-1$.

c. Quelle est la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? Vers $-\infty$? Dresser le tableau de variation de f.

Correction

1. b. Comme il y a une racine dans $Y'=2aY+2b\sqrt{Y}$ on peut se dire que $y=\varphi(Y)=\sqrt{Y}$: dérivons $y'=\frac{Y'}{2\sqrt{Y}}$, ce qui donne dans $y'=ay+b \Leftrightarrow \frac{Y'}{2\sqrt{Y}}=a\sqrt{Y}+b \Leftrightarrow Y'=2aY+2b\sqrt{Y}$. Ok.

2. 1. $y'+y=0$ a pour solutions $y=Ce^{-x}$.

2. $h(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x} \Rightarrow h'(x)=(\alpha-\alpha x-\beta)e^{-x} \Rightarrow (\alpha-\alpha x-\beta)e^{-x}+(\alpha x+\beta)e^{-x}=2e^{-x}$ d'où par identification : $\alpha=2$ et β quelconque, par exemple 0, soit $h(x)=2xe^{-x}$.

3. a. $y=g+h \Rightarrow y=Ce^{-x}+2xe^{-x}=(C+2x)e^{-x}$.

b. $f(0)=C=-1 \Rightarrow f(x)=(2x-1)e^{-x}$.

c. Lorsque x tend vers $+\infty$, f tend vers 0 (croissances comparées) ; Vers $-\infty$, f tend vers $-\infty$ car $2x-1$ tend vers $-\infty$ et e^{-x} vers $+\infty$. $f'(x)=-f(x)+2e^{-x}=(3-2x)e^{-x}$.

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	$-\infty$		$2e^{-1,5}$		0

<u>1. 33. ROC+eq. diff., Am. du Sud remplt 2007</u>

4 points

1. Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant : La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi'=\varphi$, et $\varphi(0)=1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{ax}$ est solution de l'équation $y'=ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y'=ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=g(x)e^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y'=ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'=2y+\cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x)=a\cos x+b\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'=2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Determiner la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

<u>Correction</u>

a. $f'(x)=ae^{ax}=af(x)$ donc $f(x)=e^{ax}$ est solution de l'équation $y'=ay$.

b. $h'(x)=g'(x)e^{-ax}-ag(x)e^{-ax}=ag(x)e^{-ax}-ag(x)e^{-ax}=0 \Rightarrow h(x)=K$.

c. $h(x)=K=g(x)e^{-ax} \Rightarrow g(x)=Ke^{ax}$.

2. $f_0(x)=a\cos x+b\sin x$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y'=2y+\cos x$ si

a. $f_0'(x)=2f_0(x)+\cos x \Leftrightarrow -a\sin x+b\cos x=2(a\cos x+b\sin x)+\cos x \Rightarrow \begin{cases}-a=2b\\ b=2a+1\end{cases} \Rightarrow b=\frac{1}{5},\ a=-\frac{2}{5}$.

b. $y'=2y$ a pour solutions $y=Ke^{2x}$.

c. f est solution de (E) si et seulement si $\begin{cases} f' = 2f + \cos x \\ f_0' = 2f_0 + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow f' - f_0' = 2(f - f_0)$, soit $f - f_0$ solution de (E_0).

d. Les solutions de (E) sont données par $f - f_0 = Ke^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \left(-\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right) + Ke^{2x}$.

e. $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{2}\right) + Ke^{2\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} + Ke^{\pi} = 0 \Leftrightarrow K = -\frac{1}{5}e^{-\pi}$.

1. 34. [2]Population de rongeurs, France 2005

6 points

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

a. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

PARTIE B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y' = \frac{y}{4}$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul, où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E_2) : $\begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$ pour tout nombre réel t positif ou nul, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

<u>Correction</u>

PARTIE A

touati.amin@yahoo.fr

a. On multiplie en haut et en bas par $e^{-\frac{x}{4}}$: $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}e^{-\frac{x}{4}}}{e^{-\frac{x}{4}}\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)}=\dfrac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1}$.

b. Lorsque x tend vers $+\infty$, $e^{-\frac{x}{4}}$ tend vers 0 donc f tend vers $\dfrac{3}{0+1}=3$; lorsque x tend vers $-\infty$, $e^{-\frac{x}{4}}$ tend vers $+\infty$ donc f tend vers 0.

Limites vraiment simples en utilisant la deuxième forme de f.

c. On peut remarquer que $e^{-\frac{x}{4}}$ est décroissante et que la fonction inverse l'est également ; on a alors une fonction croissante : $a\le b\Rightarrow e^{-\frac{a}{4}}\ge e^{-\frac{b}{4}}\Rightarrow 2e^{-\frac{a}{4}}+1\ge 2e^{-\frac{b}{4}}+1\Rightarrow \dfrac{3}{2e^{-\frac{a}{4}}+1}\le\dfrac{3}{2e^{-\frac{b}{4}}+1}\Rightarrow f(a)\le f(b)$.

Avec la dérivée : $f'(x)=3\dfrac{-\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)'}{\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}=3\dfrac{-\left(-2\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\right)}{\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}=3\dfrac{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}>0$.

Attention à bien utiliser la dérivée de 1/u, soit –u'/u².

PARTIE B

1. a. $y'=\dfrac{y}{4}$ a pour solutions $y=Ce^{\frac{1}{4}t}$.

b. Avec $g(0)=1$ on a $y(0)=Ce^{\frac{1}{4}0}=C=1$ d'où $g(t)=e^{\frac{1}{4}t}$.

c. $g(t)=e^{\frac{1}{4}t}\ge 3\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}t\ge\ln 3\Leftrightarrow t\ge 4\ln 3\approx 4,4$ d'où environ 4 ans et 5 mois. Après 5 années on est sûr que la population dépassera les 300 individus.

Cette première partie ne présente pas de difficulté. Attention aux unités quand même.

2. (E_2) : $\begin{cases}u'(t)=\dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{u(t)^2}{12}\\ u(0)=1\end{cases}$

a. $h=\dfrac{1}{u}\Rightarrow h'=-\dfrac{u'}{u^2}$. Or le système ($E_2$) devient en divisant par u^2 : $\begin{cases}\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{u(t)}-\dfrac{1}{12}\\ u(0)=1\end{cases}$, soit $\begin{cases}h'(t)=\dfrac{1}{4}h(t)-\dfrac{1}{12}\\ h(0)=\dfrac{1}{u(0)}=1\end{cases}$.

b. $y'=-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{12}$ a pour solutions $y=Ce^{-\frac{1}{4}t}-\dfrac{1/12}{-1/4}=Ce^{-\frac{1}{4}t}+\dfrac{1}{3}$. On a donc $h(t)=Ce^{-\frac{1}{4}t}+\dfrac{1}{3}$ et avec $h(0)=1$, on tire $C+\dfrac{1}{3}=1\Rightarrow C=\dfrac{2}{3}$. La solution u est donc $u(t)=\dfrac{1}{h(t)}=\dfrac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t}+\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2e^{-\frac{1}{4}t}+1}$, où l'on retrouve la fonction de la partie A.

c. Lorsque t tend vers $+\infty$ u se comporte comme f et tend vers 3, la population de rongeurs se stabilise donc vers 300 individus.

Le modèle ici présenté est classique et avait été donné sous une forme différente (et plus compliquée) en 2003. L'équation différentielle initiale provient du mécanisme suivant : on a $u'(t)=\dfrac{1}{12}u(t)\left(3-u(t)\right)$, la population croit, donc u est positif et inférieur à 3 ; le terme $\frac{3}{12}u$ est la croissance exponentielle de la population, le terme $3-u(t)$ tend vers 0 donc u tend vers 3. C'est l'*équation logistique* que l'on retrouve dans d'autre situations physiques (comme des réactions chimiques).

1. 35. Equa diff : Populations+probas, Pondich. 2006

7 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à 1000. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction *f* du temps *t* (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction *f* est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : (E) $y'=-\frac{1}{20}y(3-\ln y)$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction *f*, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln\left(f(t)\right)\right]$ si et seulement si la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout *t* de $[0\,;+\infty[$, $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle : (H) $z'=\frac{1}{20}z-\frac{3}{20}$.

3. En déduire qu'il existe un réel *C* tel que pour tout *t* de $[0\,;+\infty[$:

$$f(t)=\exp\left(3+C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction *f* définie par $f(t)=\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$.

a. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de *f* sur $[0\,;+\infty[$.

c. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t)<0,02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas. »

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

2. En déduire P(T).

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Correction

Partie A

1. Partons de $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$ et remplaçons *g* par ln *f*, *g'* par $-f'/f$:

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{1}{20}\ln f(t)-\frac{3}{20}\Leftrightarrow f'(t)=\frac{1}{20}f(t)\left(\ln f(t)-3\right)\Leftrightarrow f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left(3-f(t)\right).\text{ Ok !}$$

2. (H) $z'=\frac{1}{20}z-\frac{3}{20}$. Application directe du cours : $z=Ce^{\frac{1}{20}t}-\frac{-3/20}{1/20}=Ce^{\frac{1}{20}t}+3$.

3. g est solution de (H) donc $g(t)=Ce^{\frac{1}{20}t}+3$, soit $\ln f(t)=g(t)=Ce^{\frac{1}{20}t}+3 \Leftrightarrow f(t)=\exp\left(Ce^{\frac{1}{20}t}+3\right)$.

4. a. $\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ tend vers $+\infty$, $3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ tend vers $-\infty$, $\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$ tend donc vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

b. $\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ a pour dérivée $\frac{1}{20}\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ donc

$$f'(t)=\left[3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]'\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)=-\frac{3}{20}\exp\left(\frac{t}{20}\right)\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)<0,$$

f est décroissante.

c.

$$\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)<0,02 \Leftrightarrow 3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)<\ln 0,02 \Leftrightarrow \frac{3-\ln 0,02}{3}<\exp\left(\frac{t}{20}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{3-\ln 0,02}{3}<\frac{t}{20} \Leftrightarrow t>20\ln\frac{3-\ln 0,02}{3}\approx 16,69.$$

Ainsi, selon ce modèle, au bout de 17 ans, la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.

Partie B

1. D'après l'énoncé, P(M) = 0,5 ; $P_M(T)=0,99$ et $P_{\overline{M}}(T)=0,001$.

2. D'après la formule des probabilités totales, P(T) = P(M)× $P_M(T)+P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(T)$ donc

P(T) = 0,5× 0,99 + (1−0,5)× 0,001 = 0,4955.

3. Pour savoir si un test est fiable, il faut calculer sa valeur prédictive, c'est-à-dire $P_T(M)$.

Or $P_T(M)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{P(M)\times P_M(T)}{P(T)}=\frac{0,5\times 0,99}{0,4955}\approx$ 0,99899. Ce nombre n'est pas supérieur à 0,999 donc le test n'est pas estimé fiable.

1. 36. Equa diff, France et La Réunion 09/2008 3 pts

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle]0 ; +∞[vérifiant l'équation différentielle (E) : $xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2$.

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'=2y+8$.

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=xh(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A (ln 2, 0) ? Si oui la préciser.

Correction

(E) : $xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2$.

1. a. $g(x)=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$, d'où en remplaçant dans (E') :

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2\frac{f(x)}{x}+8 \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=2xf(x)+8x^2 \Leftrightarrow xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2.$$

b. Même chose mais à l'envers.

2. $y'=2y+8$ a comme solutions $y=h(x)=Ce^{2x}-\frac{8}{2}=Ce^{2x}-4$.

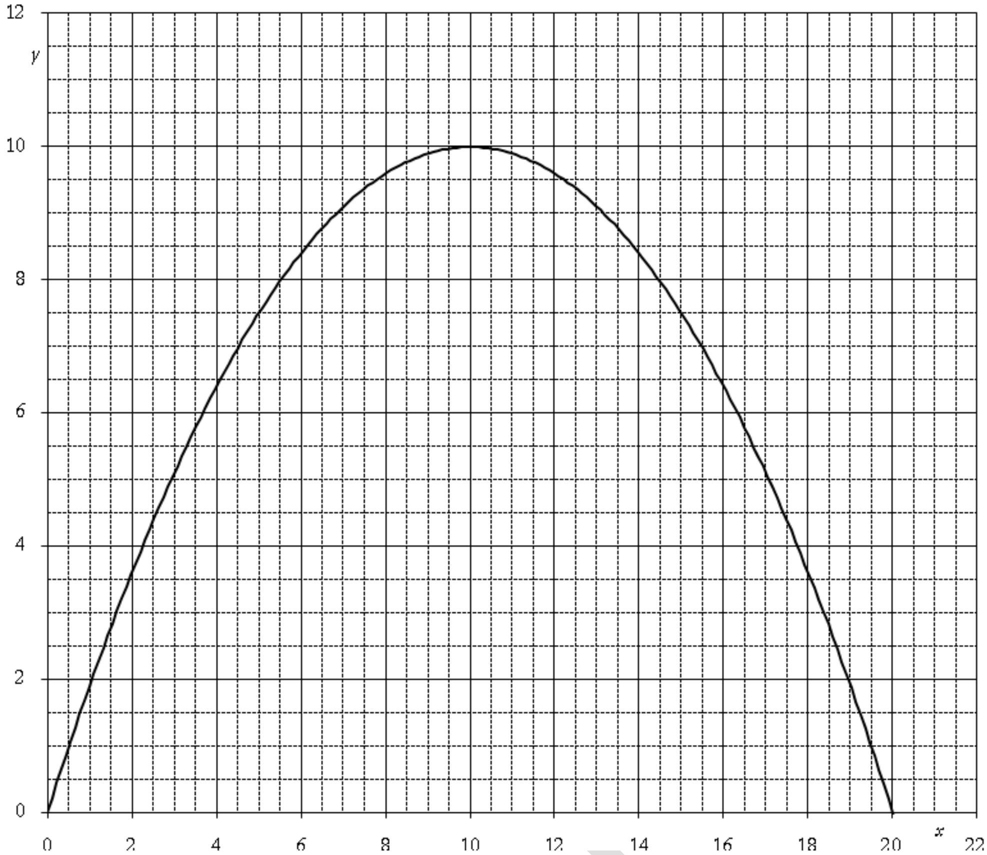
Les solutions de (E) sont donc $f(x)=xh(x)=x\left(Ce^{2x}-4\right)$.

3. $f(\ln 2)=0 \Leftrightarrow \ln 2\left(Ce^{2\ln 2}-4\right)=0 \Rightarrow 4C=4 \Rightarrow C=1$; la solution cherchée est $f(x)=x\left(e^{2x}-4\right)$.

1. 37. Loi logistique, Pondicherry 06/2008, 7 pts

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes



Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose n = 0 en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout n >0, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n \left(20 - u_n \right)$.

1. Soit f la fonction définie sur [0 ; 20] par $f\left(x \right) = \frac{1}{10} x \left(20 - x \right)$.

a. Étudier les variations de f sur [0 ; 20].

b. En déduire que pour tout $x \in$ [0 ; 20], $f\left(x \right) \in$ [0 ; 10].

c. On donne ci-dessus la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormal. Représenter à l'aide de ce graphique les cinq premiers termes de la suite $\left(u_n \right)_{n>0}$ sur l'axe des abscisses.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 10$.

3. Montrer que la suite $\left(u_n \right)_{n>0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g\left(x \right)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x. On pose x = 0 en 2005, $g\left(0 \right) = 1$ et g est une solution qui ne s'annule pas sur $\left[0\,;+\infty \right[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{20} y \left(10 - y \right)$.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $\left[0\,;+\infty \right[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : (E_1) : $z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}$.

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

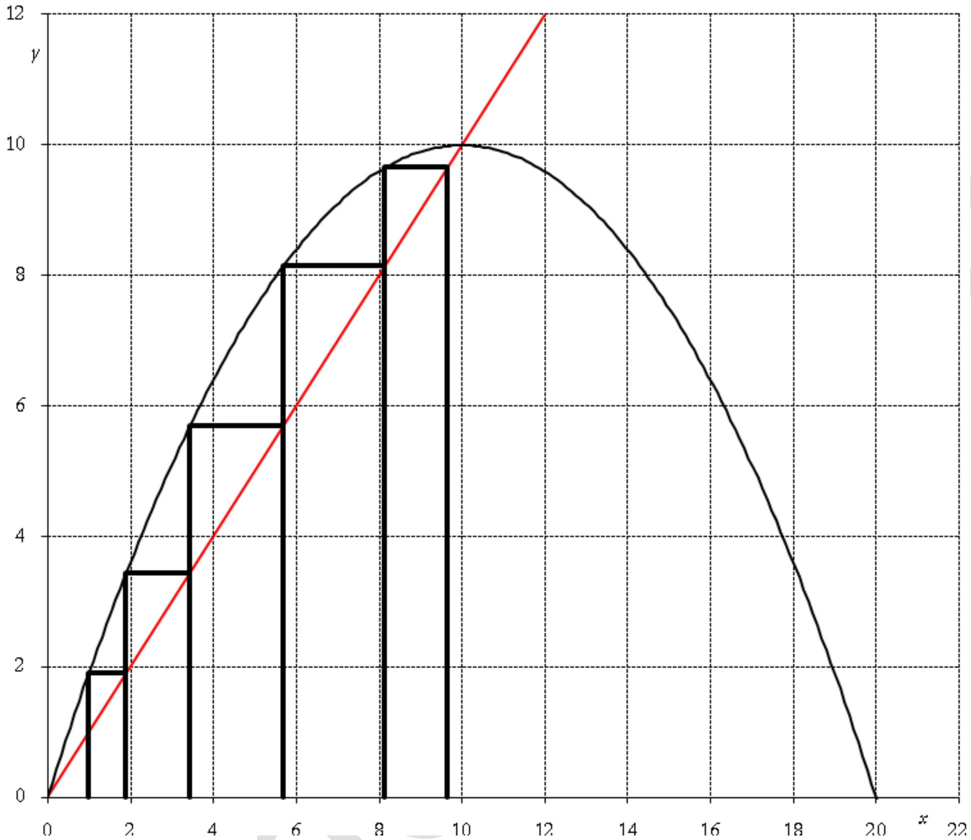
2. Montrer que g est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Correction



Partie A : un modèle discret

$u_0=1,\ u_{n+1}=\dfrac{1}{10}u_n(20-u_n)=f(u_n)$.

1. a. $f(x)=\dfrac{1}{10}x(20-x)=-0{,}1x^2+2x\Rightarrow f'(x)=-0{,}2x+2$, positive lorsque $x<10$, donc f est croissante jusqu'à 10, décroissante après.

b. On a $f(0)=f(20)=0$ et $f(10)=10$ donc $0\le f(x)\le 10$ lorsque $x\in[0\,;20]$.

c. Voir figure.

2. $u_1=0{,}1\times1\times19=1{,}9$ donc $0\le u_0\le u_1\le 10$.

Par ailleurs si $0\le u_n\le 10$, alors comme f est croissante, $f(0)\le f(u_n)\le f(10)\Leftrightarrow 0\le u_{n+1}\le 10$. Il reste à montrer que u_n est croissante : si $u_n\le u_{n+1}\Rightarrow f(u_n)\le f(u_{n+1})\Leftrightarrow u_{n+1}\le u_{n+2}$.

3. u_n est croissante et majorée, elle converge vers le point d'intersection entre la courbe de f et la droite $y=x$, soit 10.

Partie B : un modèle continu

1. a. $z=\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{z}\Rightarrow y'=-\dfrac{z'}{z^2}$, remplaçons dans (E) :

$$y'=\frac{1}{20}y(10-y)\Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2}=\frac{1}{20z}\left(10-\frac{1}{z}\right)=\frac{z}{2z^2}-\frac{1}{20z^2}\Leftrightarrow z'=-\frac{1}{2}z+\frac{1}{20}.$$

touati.amin@yahoo.fr

b. (E₁) a comme solutions les fonctions $z=Ce^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1/20}{-1/2}=Ce^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{10}$ et donc les solutions de l'équation (E) sont $y=\frac{1}{z}=\frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{10}}=\frac{10}{10Ce^{-\frac{1}{2}x}+1}$.

2. Comme $g(0)=1$, on a $\frac{10}{10Ce^{0}+1}=1\Leftrightarrow 10=10C+1\Leftrightarrow 10C=9$ et donc $g(x)=\frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1}$.

3. $g'(x)=-\frac{10\left(9\times-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x}+1\right)^2}=\frac{45e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x}+1\right)^2}>0$ donc g croit...

4. En $+\infty$ $e^{-\frac{1}{2}x}$ tend vers 0 et g tend vers 10.
Il y a saturation du marché qui ne peut dépasser plus de 10 millions de foyers équipés.

5. $g(x)=\frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1}\geq 5\Leftrightarrow 45e^{-\frac{1}{2}x}+5\leq 10\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x}\leq\frac{1}{9}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x\leq-\ln 9\Leftrightarrow x\geq 2\ln 9\approx 4,39$, donc en 2010.

1. 38. Equa diff+exp, France rempl. 2005

7 points

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe C.
5. Calculer l'intégrale $\int_0^3 f(x)dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle (E') : $y'+\frac{1}{2}y=0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E').

c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

Corrigé

Partie A $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

1. En $+\infty$, $e^{-\frac{1}{2}x}$ tend vers 0 et l'emporte allègrement sur $20x+10$. La limite est 0.

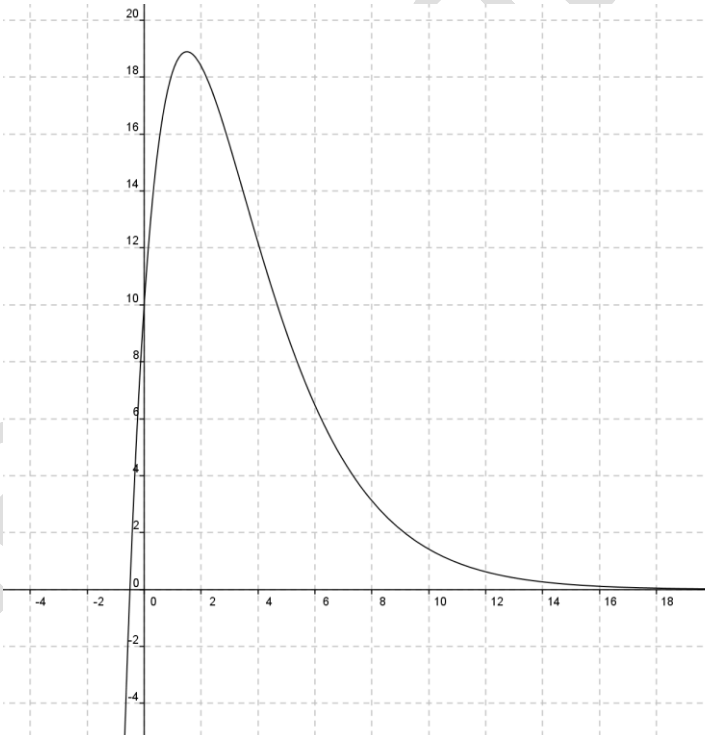
2. $f'(x)=20e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(20x+10\right)e^{-\frac{1}{2}x}=\left(-10x+15\right)e^{-\frac{1}{2}x}$ qui est positif lorsque $x<\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

x	0		3/2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	
$f'(x)$	10	↗	18,9	↘	0

3. Comme $f(0)=10$ et f est croissante, il n'y a pas de solution entre 0 et 3/2 ; comme la limite en $+\infty$ est 0, il y a une unique solution entre 3/2 et $+\infty$:

$f(4,674)=9,997...\leq 10\leq 10,00099=f(4,673)$

donc $4,673\leq\alpha\leq 4,674$.



5. Intégration par parties :

$$\int_0^3 f(x)dx=\left[(20x+10)(-2)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3-\int_0^3 -40e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

$$=-140e^{-3/2}+20+40\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3=-220e^{-3/2}+100.$$

Partie B

1. $y'+\frac{1}{2}y=\left(-10t+15\right)e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}(20t+10)e^{-\frac{1}{2}t}=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

2. g solution : $g'+\frac{1}{2}g=20e^{-\frac{1}{2}t}$; comme on a $f'+\frac{1}{2}f=20e^{-\frac{1}{2}t}$, en soustrayant on a

$g'-f'+\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}f=0\Leftrightarrow\left(g-f\right)'+\frac{1}{2}\left(g-f\right)=0$, soit $g-f=Ce^{-\frac{1}{2}t}\Rightarrow g(t)=f(t)+Ce^{-\frac{1}{2}t}$; comme $g(0)=10$, on a $C=g(0)-f(0)=10-10=0$ et donc $g=f$.

3. La température redescend à 10 à $t=\alpha$, soit environ 4,67 h.

4. $\frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{3}\left(-220e^{-3/2}+100\right)\approx 17°$.

touati.amin@yahoo.fr