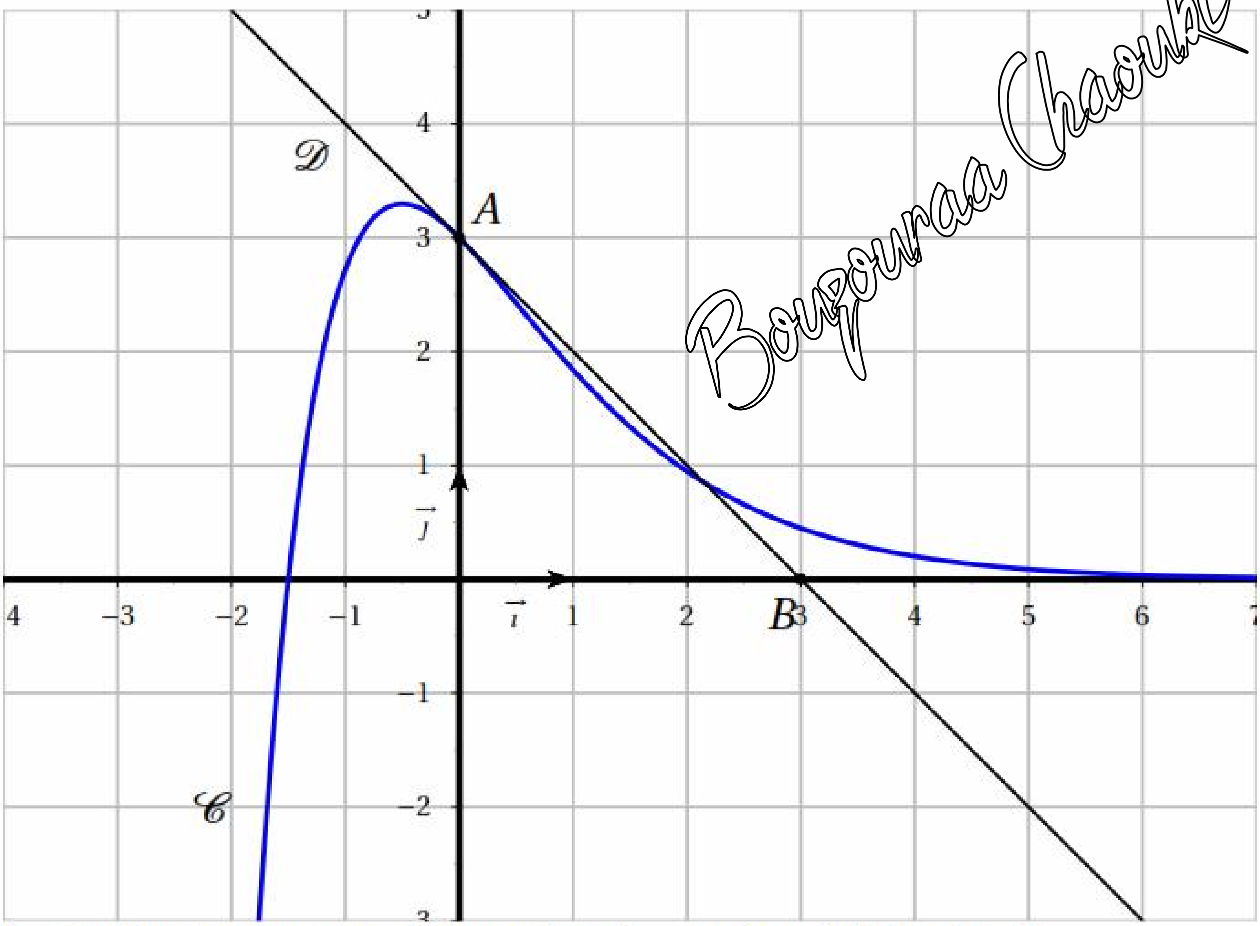
Exercice 1

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.



La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
Cette tangente passe par le point B de coordonnées (3 ; 0).

1. **a.** Lire graphiquement $f(0)$.

   b. En déduire la valeur de b.

2. **a.** Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{D}$.

   b. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, puis en déduire la valeur de a.

Partie B : étude d'une fonction et calcul intégral

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

1. **a.** Étudier la limite de f en $-\infty$.

   b. Étudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

www.devoirat.net 2015

c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f.

3. a. Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$.

b. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

a. Calculer la valeur exacte de I, puis donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

b. Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

c. Interpréter I comme l'aire, en unités d'aire, d'un domaine du plan à définir.

Exercice 2

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 3 - 3\ln x + x^3.$$

1. a. Montrer que la fonction dérivée g' de la fonction g peut s'écrire, pour tout nombre réel x strictement positif, sous la forme :

$$g'(x) = \frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}.$$

b. Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

c. En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Donner la valeur de $g(1)$.

3. Déduire des questions précédentes que la fonction g est strictement positive sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. a. Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2},$$ où g est la fonction définie dans la **partie A**.

Bouzouraa Chaouki
www.devoirat.net 2015

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$, la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point. On notera α l'abscisse de ce point.

À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. La parabole $\mathscr{P}$ est représentée en **annexe**, à rendre avec la copie.

Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

On précisera les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

5. Tracer sur le graphique de **l'annexe**, à rendre avec la copie, la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : calcul d'une aire

On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité, d'une part, par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, d'autre part, par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

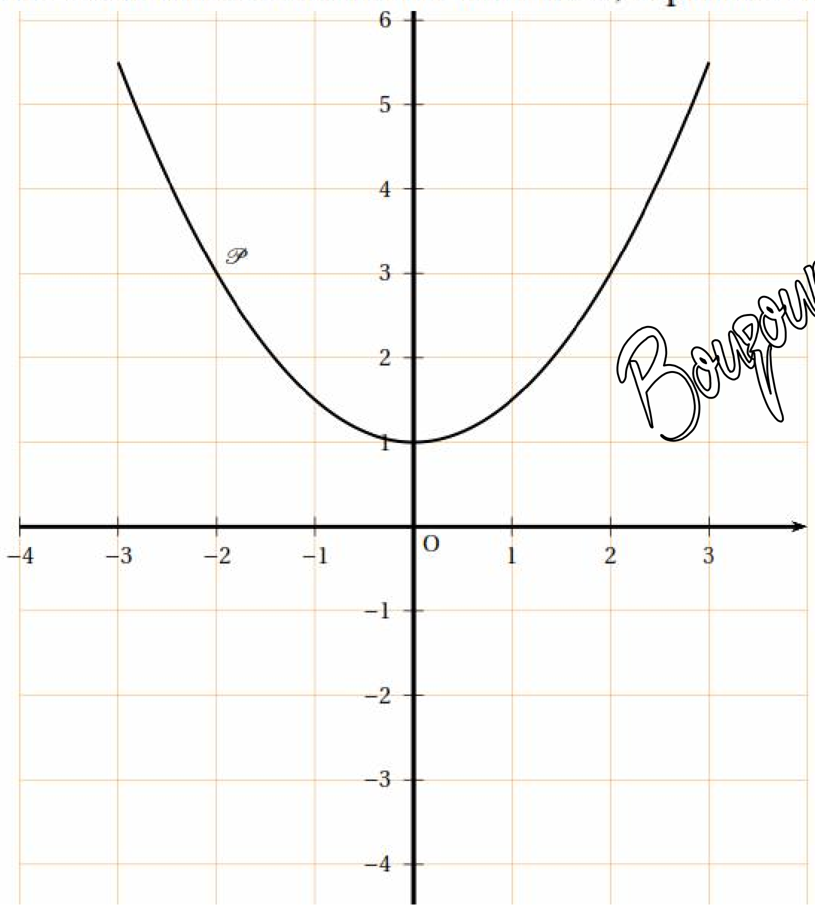
1. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique de l'**annexe**, à rendre avec la copie.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

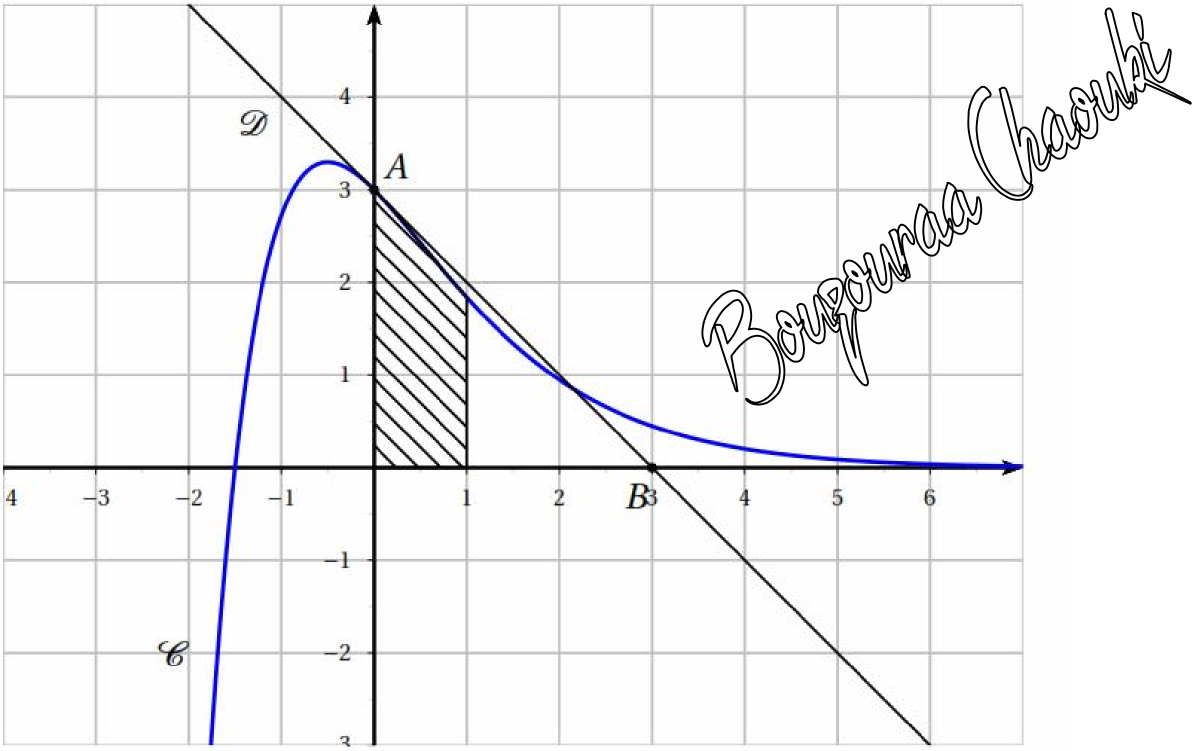
3. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unité d'aire.



Bouzouraa Chaouki

www.devoirat.net 2015

Exercice 1



1. **a.** On lit $f(0) = 3$.

 b. On a $f(0) = be^{-0} = b = 3$.

2. **a.** Le repère est orthonormal, donc le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$ est égal à : $f'(0) = \dfrac{-3}{3} = -1$

 b. En appliquant la règle sur la dérivée d'un produit :

 $f'(x) = ae^{-x} + (-1) \times (ax + b)e^{-x} = e^{-x}(a - ax - b) = e^{-x}(a - 3 - ax)$.

 On a vu que $f'(0) = -1$, soit :

 $e^{-0}(a-3) = -1 \iff a - 3 = -1 \iff a = 2$.

 On a donc quel que soit le réel s, $\quad f(x) = (2x+3)e^{-x}$.

Partie B : étude d'une fonction et calcul intégral

1. **a.** On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+3) = -\infty$, d'où par produit de limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

 b. On peut écrire en développant :

 $f(x) = 2xe^{-x} + 3e^{-x}$.

 On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

 Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

www.devoirat.net 2015

2. **a.** On a vu que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(a-3-ax) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. On sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le signe de f' est celui du facteur $(-2x-1)$.

$-2x-1>0 \iff -1>2x \iff -\dfrac{1}{2} > x$;

de même $-2x-1<0 \iff -1<2x \iff -\dfrac{1}{2} < x$.

Bouzouraa Chaouki

c. Les résultats précédents montrent que :

- f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$;

- f est décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$. (ce qui correspond bien à la courbe donnée).

De plus $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

3. **a.** Calculons : $-f'(x)+2\mathrm{e}^{-x} = -(-2x-1)\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x}+3\mathrm{e}^{-x} = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.

b. Une primitive de $-f'(x)$ est $-f(x)$;

Une primitive de $2\mathrm{e}^{-x}$ est $-2\mathrm{e}^{-x}$.

Donc par somme : une primitive de $-f'(x)+2\mathrm{e}^{-x}$ (donc de $f(x)$) est $F(x) = -f(x)-2\mathrm{e}^{-x} = -(2x+3)\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x} = -2x\mathrm{e}^{-x}-3\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x} = -2x\mathrm{e}^{-x}-5\mathrm{e}^{-x} = F(x) = (-2x-5)\mathrm{e}^{-x}$.

4. **a.** D'après la question précédente :

$I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1)-F(0) = \left((-2\times1-5)\mathrm{e}^{-1}\right)-\left((-2\times0-5)\mathrm{e}^{-0}\right) = -7\mathrm{e}^{-1}+5 = 5-7\mathrm{e}^{-1}$.

La calculatrice donne : $I \approx 2,4248 \approx 2,425$ à 10^{-3} près.

b. On a $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2x \leqslant 2 \Rightarrow 3 \leqslant 2x+3 \leqslant 5$. Donc sur $[0\,;\,1]$, $2x+3>0$ et comme $\mathrm{e}^{-x}>0$ pour tout réel x, $f(x)>0$ sur $[0\,;\,1]$.

c. On vient de voir que sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction f est positive, donc I est la mesure en unités d'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

On vérifie sur la figure que I vaut à peu près deux unités et demie.

www.devoirat.net 2015

Exercice 2

Partie A :

1. **a.** Sur $]0\ ;\ +\infty[$, toutes les fonctions sont dérivables et sur cet intervalle :
$g'(x) = -3\dfrac{1}{x} + 3x^2 = 3\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right) = 3\left(\dfrac{x^3-1}{x}\right)$.
Or $x^3 - 1$ s'annule pour $x = 1$: on peut donc écrire :
$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + bx + c\right)$, soit :
$x^3 - 1 = x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c = x^3 + x^2(b-1) + x(c-b) - c$.
En identifiant les deux écritures : $b - 1 = 0 \iff b = 1$; $-c = -1 \iff c = 1$.
Donc $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$.
Finalement : $g'(x) = \dfrac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$.

 b. Le trinôme $x^2 + x + 1$ a un discriminant ($\Delta = 1 - 4 = -3$ négatif il est donc du signe du coefficient de x^2 donc positif pour tout réel ; comme $x > 0$ il en résulte que le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$.
Donc si $x > 1$, $g'(x) > 0$;
si $x = 1$, $g'(x) < 0$.

 c. On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

2. $g(1) = 3 - 3\ln 1 + 1^3 = 3 + 1 = 4$.
3. D'après le tableau de variations le minimum de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$ est égal à 4, donc $g(x) \geqslant 4 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B :

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

 b. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

2. **a.** $f'(x) = 3\dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2}\times 2x = \dfrac{3 - 3\ln x}{x^2} + x = \dfrac{3 - 3\ln x + x^3}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

 b. On a vu à la question **A 3.** que $g(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc sur cet intervalle $f'(x) > 0$.

 c. Le résultat précédent montre que f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

Bouzouraa Chaouki

www.devoirat.net 2015

3. a. Le résultat précédent montre que sur l'intervalle [0,5 ; 1], f est strictement croissante de $f(0,5) = \dfrac{3\ln 0,5}{0,5+\frac{1}{2}0,5^2+1} \approx -3 < 0$ à

$f(1) = \dfrac{3\ln 1}{1} + \dfrac{1}{2}1^2 + 1 = \dfrac{1}{2}1 + 1 = \dfrac{3}{2} > 0.$

Il existe donc un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$, α étant l'abscisse du point unique où la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses.

La calculatrice donne successivement : $0,5 < \alpha < 1$;

$0,7 < \alpha < 0,8$;

$0,73 < \alpha < 0,74$.

Bouzouraa Chaouki

4. Soit d la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $d(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right) = 3\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{2}x^2 + 1 - \left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right) = 3\dfrac{\ln x}{x}$.

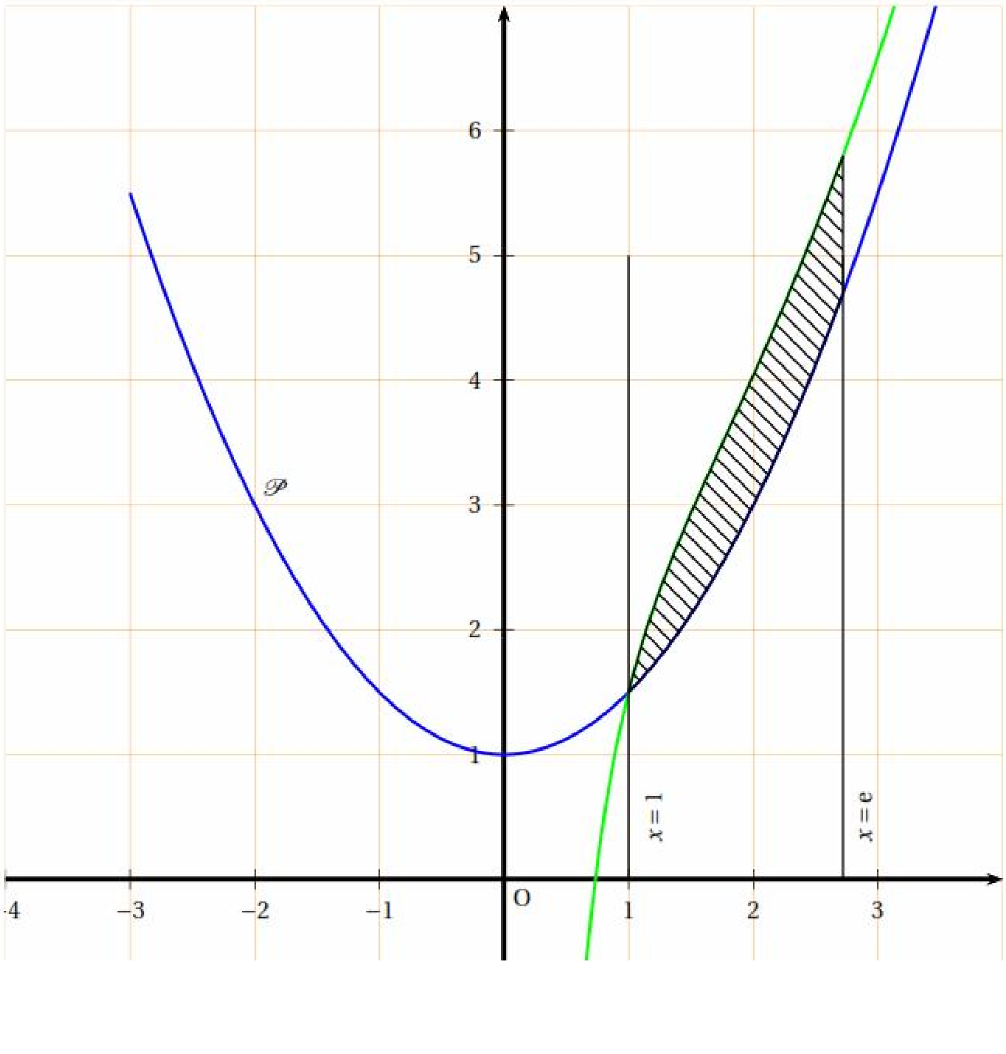
Comme $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui de $\ln x$. On sait que $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$ et $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$.

Sur $]0\ ;1[$, $d(x) < 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est sous la parabole $\mathscr{P}$.

Sur $]1\ ;\ +\infty[$, $d(x) > 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la parabole $\mathscr{P}$.

Pour $x = 1$ les deux courbes ont en commun le point $\left(1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

5. Voir la figure



Partie C : calcul d'une aire

1. Voir la figure à la fin.
2. h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $h'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$.
3. Donc h est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
   Une primitive de la fonction $x \longmapsto 3\dfrac{\ln x}{x}$ est donc $\dfrac{3}{2}(\ln x)^2$.
   On a vu que pour $x > 1$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la parabole, donc l'aire de la surface hachurée est égale à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)\,\mathrm{dx} = \int_1^{\mathrm{e}} 3\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{3}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{3}{2}(\ln \mathrm{e})^2 - \frac{3}{2}(1)^2 = \frac{3}{2} =$
   $1{,}5$ unité d'aire.

Bouzouraa Chaouki

www.devoirat.net 2015