Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln^2 x-3\ln x+1\right)$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x-1}{x-2\ln x}\right)$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-\ln x+1}{1+2\ln x}\right)$	$\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin(2x)}\right)$	$\lim_{x\to0^+} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$	$\lim_{x\to0^+} x\sqrt{1+\ln^2 x}$	$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\ln(1+\tan x)$	$\lim_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{1+\sin x}{x}\right)$	$\lim_{x\to-\infty} 1+x\ln(1-x)$
$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\ln(x+1)}{\ln x}\right)$	$\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+\tan x)}{x}\right)$	$\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\right)$	$\lim_{x\to1}\left(\dfrac{\ln(x+1)-\ln(2)}{x-1}\right)$

Exercice n°2 :

Répondre par vrai ou faux :

1) Soit $C=\{M(x,y)\text{tel que } y=1-\tan x \text{ et } 0\le x\le \frac{\pi}{4}\}$ et S le solide obtenu par la rotation de C autour de l'axe (Ox).Le volume S est égal à : $\pi(1-\ln 2)$.
2) Soit F la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^{\ln x} t^2dt$. Alors pour tout $x\in]1,+\infty[$ $F'(x)=(\ln x)^2-x^2$.
3) Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln x$. Alors : $\dfrac{1}{x+1}\le\ln(x+1)-\ln(x)\le\dfrac{1}{x}$
4) Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\tan x}$ une primitive F de la fonction f sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ est $F(x)=\ln(\cos x)$.
5) $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 2}\frac{dt}{t}=\ln 2$, $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{dx}{x\ln x}=\ln 2$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx=\ln 2$.
6) La valeur moyenne de la fonction $x\mapsto\ln x$ sur [1,2] est : $\ln\left(\dfrac{4}{e}\right)$.
7) Le volume V obtenu par la rotation du domaine $D=\left\{M(x,y) \text{ tels que } y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \text{ et } 1\le x\le e\right\}$ est : $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice n°3 :

A) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=-2x^2-1+\ln x$.

1) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$.
2) Dresser le tableau de variations de g sur $]0,+\infty[$.
3) En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x)<0$.

B) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-x+1-\frac{\ln x}{2x}$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1) a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) Démontrer que la droite Δ d'équation $y=-x+1$ est asymptote à la courbe C_f.

d) Étudier la position relative de C et Δ sur $]0\ ;+\infty[$.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

b) Vérifier que pour tout x de $]0\ ;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$.

c) Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur $]0\ ;+\infty[$.

d) Calculer f (1). En déduire le signe de f sur $]0\ ;+\infty[$.

3) Dans le plan muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tracer la droite Δ et la courbe C_f.

4) Vérifier que la fonction F définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$ puis calculer l'intégrale $I=\int_1^e f(x)dx$.

5) Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ de E en cm^2.

Exercice n°4 :

A) Soit g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=x^2-2+\ln x$.

1) Etudier les variations de g sur $]0\ ;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique sur $]0\ ;+\infty[$. On note α cette solution.

3) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

4) Montrer l'égalité : $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

B) On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$.

1) Exprimer, pour tout x de $]0\ ;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de g(x).

2) En déduire les variations de f sur $]0\ ;+\infty[$.

C) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x, x appartenant à $]0\ ;+\infty[$.

1) Montrer que la distance AM est donnée par $AM=\sqrt{f(x)}$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{f(x)}$.

a) Montrer que les fonctions f et h ont les mêmes variations sur $]0\ ;+\infty[$.

b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté I, dont on précisera les coordonnées.

c) Montrer que $\mathrm{AI} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3) La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

<u>Exercice n°5 :</u>

A) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $\mathrm{f}(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{f}(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C).

b) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ).

c) Tracer la courbe (C) et la droite (Δ).

B) On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation x = 1 et x = α .

On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

1) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $A(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha}$.

2) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = l$. Démontrer que $l = A\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

<u>Exercice n°6 :</u>

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

A) Soit f l'application définie sur]0 ; $+\infty$ [par $\mathrm{f}(x) = x - 4 - \dfrac{\ln x}{4}$ et C_f sa courbe représentative.

1) Calculer les limites de f aux bornes de] 0 ; $+\infty$ [. Justifier que C_f admet une asymptote et en donner une équation.

2) a) Etudier les variations de f sur]0 ; $+\infty$ [et dresser son tableau de variations.

b) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α appartenant à [3 , 4].

c) Tracer C_f .

3) Soit D le domaine limité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = α et x = 4.

a) Calculer, pour $x > 0$, la dérivée de $x \mapsto x \ln x$.

b) En utilisant le résultat du a., exprimer l'aire en cm^2 du domaine D à l'aide d'un polynôme du second degré en α .

B) Dans cette partie, I désigne l'intervalle [3 ; 4].

1) Soit g l'application définie sur]0 ; $+\infty$ [par $g(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln x$.

a) Montrer que α est solution de l'équation : $g(x) = x$.

b) Montrer que l'image de l'intervalle I par g est incluse dans I.

c) Montrer que, pour tout élément x appartenant à I : $|g'(x)| \le \dfrac{1}{12}$.

2) Soit $\left(\mathrm{U_n}\right)_{n\in\mathrm{IN}}$ la suite définie par : $\begin{cases} \mathrm{U_0} = 3 \\ \mathrm{U_{n+1}} = g\left(\mathrm{U_n}\right) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, $\mathrm{U_n} \in I$.

b) Prouver que, pour tout entier naturel n $\left|\mathrm{U_{n+1}} - \alpha\right| \leq \frac{1}{12}\left|\mathrm{U_n} - \alpha\right|$. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n $\left|\mathrm{U_n} - \alpha\right| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n$.

Exercice n°7 :

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ pour tout n entier non nul.

1) Calculer I_0 et I_1 (on pourra utiliser une intégration par parties).
2) Montrer que pour tout n entier $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$. Calculer I_2 .
3) Montrer que pour tout n entier, $I_{n+1} \leq I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2) l'encadrement suivant : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.
4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice n°8 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur [0,1] telle que : f (0) = 0 et $\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

A) 1) Déterminer le sens de variation de f sur [0,1].

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : g (x) = $\mathrm{f}\left(\tan x\right)$.

a) Justifier que g dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\mathrm{g}'(x) = 1$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\mathrm{g}(x) = x$. En déduire que $\mathrm{f}(1) = \frac{\pi}{4}$.

3) Montrer que pour tout x de [0,1] $0 \leq \mathrm{f}(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

B) Soit $\left(\mathrm{I_n}\right)$ la suite définie par $\mathrm{I_0} = \int_0^1 \mathrm{f}(x)\, dx$ et pour tout $\mathrm{n} \in \mathrm{IN}^*$ $\mathrm{I_n} = \int_0^1 x^n \mathrm{f}(x)\, dx$.

1) Calculer $\mathrm{I_0}$.
2) a) Montrer que pour tout $\mathrm{n} \in \mathrm{IN}^*$ $\mathrm{I_n} \geq 0$.

b) pour tout $\mathrm{n} \in \mathrm{IN}^*$ $\mathrm{I_n} \leq \frac{\pi}{4(\mathrm{n}+1)}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I_n}$.

Exercice n°9 :

On considère les suites ($\mathrm{U_n}$) et ($\mathrm{V_n}$) définies sur IN^* par $\mathrm{U_n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ et $\mathrm{V_n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{n}\, x^n}{1+x^n} dx$.

1) a) Calculer $\mathrm{U_1}$ et vérifier que pour tout $\mathrm{n} \in \mathrm{IN}^*$ $\mathrm{V_n} + \mathrm{nU_n} = \mathrm{n}$

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$ $1 - x^{n} \leq \dfrac{1}{1+x^{n}} \leq 1$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN^{*}$ $1 - \dfrac{1}{1+n} \leq U_n \leq 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $V_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^{n})dx$ $n \geq 2$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$ $0 \leq \ln(x+1) \leq x$.En déduire que $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^{n})dx \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} [n(1-U_n)] = \ln 2$.

Exercice n°10 :

Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Montrer que la droite D : x = 1 est un axe de symétrie de la courbe (C).
c) Préciser les branches infinies de (C) au voisinage de $+\infty$.
d) Tracer (C) .

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_1^{1+\tan x} \dfrac{dt}{t^2 - 2t + 2}$

a) Montrer que F dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ puis calculer F '(x).

b) En déduire que l'expression de F (x) puis déterminer $\int_1^2 \dfrac{dt}{t^2 - 2t + 2}$.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties Montrer que $\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 2 - 2\int_1^2 \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 2}$.

b) Vérifier que $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 2} = 1 + \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

c) En déduire l'aire de la partie limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

Exercice n°11 :(Principale 2012)

Dans l'annexe ci-jointe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f(x) = -\frac{x^2 + x\ln x + x}{(x+1)^2} \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses autre que le point O.

1) a/ Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.
b/ Montrer que $\ln\alpha = -(\alpha+1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} + 1$

et on désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}=0$.

3) a/ Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$, $g'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$.

b/ Dresser le tableau de variation de g.

4) a/ Montrer que $g(\alpha)=1-\alpha$.

b/ Construire alors, sur l'annexe, le point de la courbe C_g d'abscisse α.

c/ Tracer la courbe C_g.

5) On désigne par $\mathbf{A}$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes C_g, C_f et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\int_\alpha^1 f(x)dx=-\left[xg(x)\right]_\alpha^1+\int_\alpha^1 g(x)dx.$$

b/ En déduire que $\mathbf{A}=\alpha^2-\alpha+1$.