Professeur : Briki Chaker

E-mail: chakerbriki@yahoo.fr

Série n° 9

Physique

Bac Math

2013/2014

Exercice I

*Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide **(S)** de masse **m**, fixé à un ressort à spires non jointives, de raideur **k** et de masse négligeable. Le solide **(S)** se déplace, sans frottement, sur un guide horizontal **(T)**. La position du centre d'inertie **G** de **(S)** est repérée par son abscisse **x(t)** sur un axe horizontal **(x'Ox)** dans le repère $(O, \vec{i})$. L'origine des abscisses est confondue avec **G** lorsque le solide **(S)** est en équilibre (figure 1).*

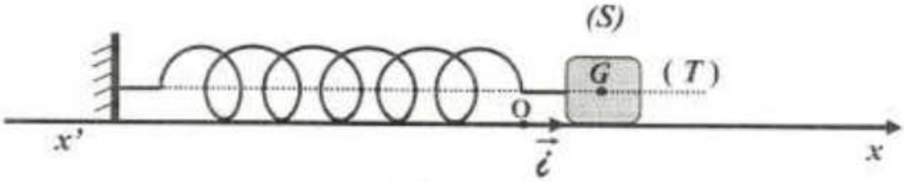


Figure 1

A- Le solide (S), à un instant $t = 0s$, est écarté de **2 cm** de sa position d'équilibre puis lancé avec une vitesse initiale v_0. Les variations de **x(t)** sont données par la figure 2.

1-a- Etablir l'équation différentielle en **x(t)** régissant le mouvement de (S).

b- Vérifier que : $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ est une solution de cette équation différentielle, en précisant l'expression de ω_0.

2- Par exploitation de la courbe de la figure 2:

a- déterminer l'amplitude X_m, la pulsation ω_0 et la phase initiale φ_x.

b- déduire la valeur de la raideur **k** du ressort. On prendra $m = 160$ g.

c- déterminer le sens et la valeur de la vitesse de (S) à l'instant $t = 0$ s.

3-a- Montrer que l'énergie mécanique **E**, du système {ressort, solide S} est constante et calculer sa valeur.

b- Déduire la valeur de l'énergie cinétique E_c du solide (S) à l'instant $t = 0,7$ s.

B- le solide **(S)** est maintenant soumis à une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(2\pi N t)\vec{i}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$, où **h** est une constante positive. Les variations de l'élongation **x(t)** et de la force excitatrice **F(t)** sont données par les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de la figure 3 de la page 5/5.

1- Identifier, en le justifiant, la courbe qui correspond à la variation de **x(t)**.

2- Déterminer graphiquement :

a- les valeurs des amplitudes X_m et F_m.

b- la phase initiale φ_x de l'élongation et la fréquence **N** de la force excitatrice.

3-a- Etablir l'équation différentielle en **x(t)** qui régit les oscillations de **(S)**.

b- Faire la construction de Fresnel relative à cette équation différentielle en **x(t)**.

c- En déduire, par exploitation de cette construction, la valeur de la constante **h**.

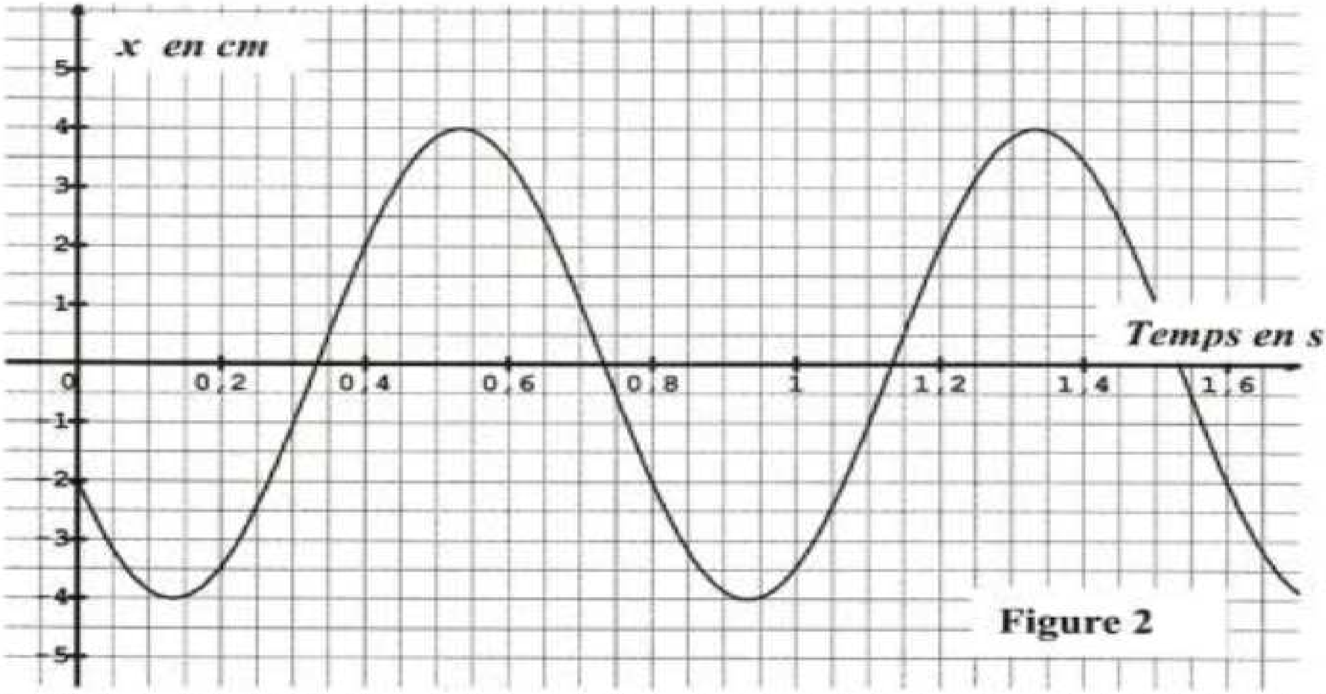


Figure 2

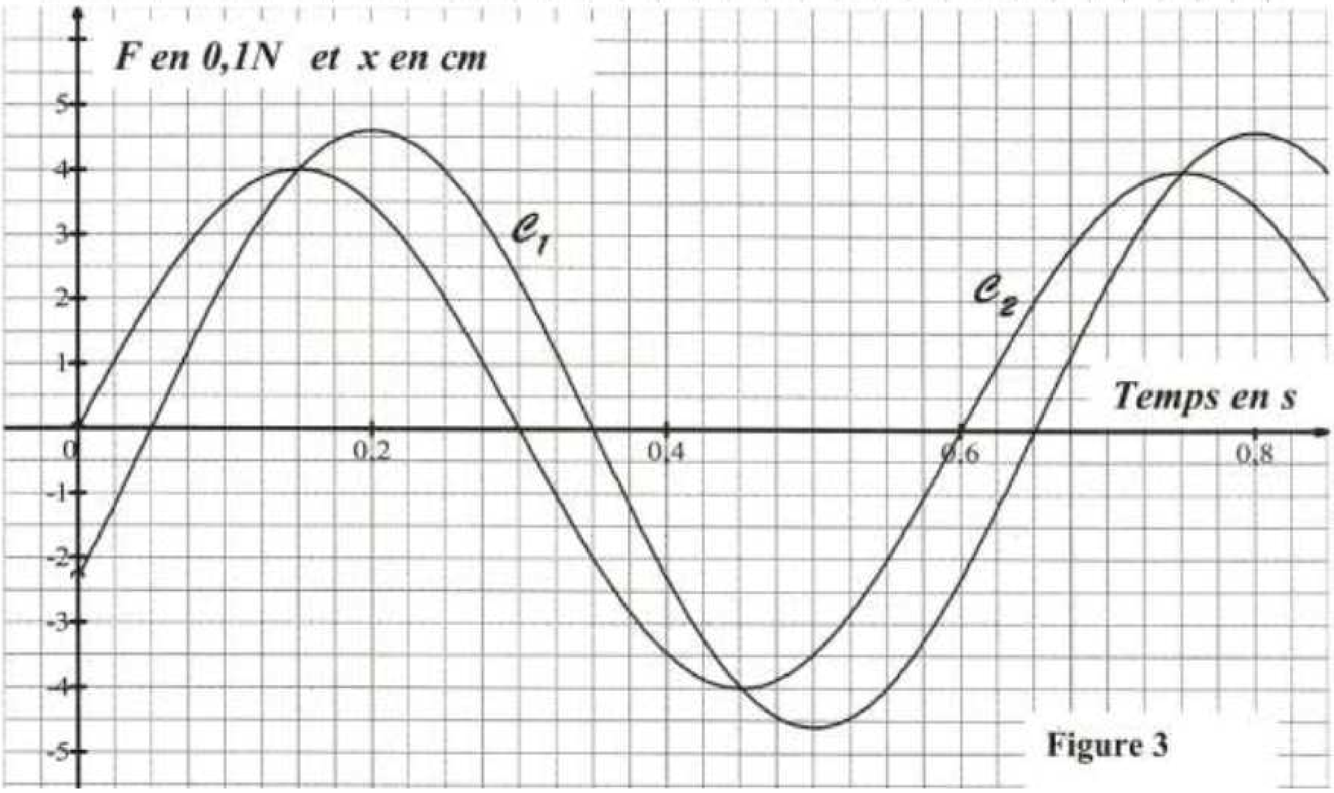
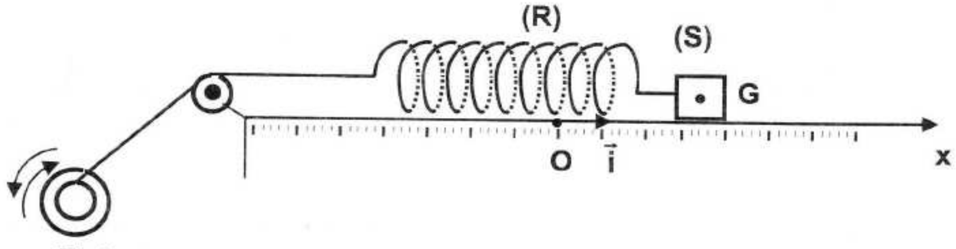


Figure 3

Exercice II

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort **(R)**, à spires non jointives, de masse supposée négligeable et de raideur **k = 25 N.m⁻¹**, lié à un solide **(S)** supposé ponctuel de masse **m** qui peut se déplacer sur un plan horizontal. A l'équilibre, le centre d'inertie **G** du solide coïncide avec l'origine **O** d'un repère $(O, \vec{i})$. La position du solide à un instant **t** donné est repérée par son abscisse **x(t)** dans ce repère (**figure 2**). Au cours de son mouvement, le solide **(S)** est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$; où **h** est une constante positive et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée de **G**. Un dispositif approprié (moteur) permet d'exercer sur **(S)** une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m.\sin(2\pi Nt).\vec{i}$, d'amplitude F_m constante et de fréquence **N** réglable, de façon que $x(t) = X_m.\sin(2\pi Nt + \varphi_x)$; où X_m est l'amplitude et φ_x est la phase initiale de **x(t)**.

Figure 2



1) Une étude expérimentale a permis de tracer les courbes **(a)** et **(b)**, données par **la figure 3**, dont l'une représente l'évolution de l'élongation **x(t)** et l'autre celle de **F(t)**.

a- Justifier que la courbe **(a)** correspond à **x(t)**.

b- Déterminer les valeurs de X_m, F_m et **N**.

c- Déterminer le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x$;

où φ_F est la phase initiale de $\vec{F}(t)$.

2) Etablir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie **G** du solide **(S)**, en fonction de **x** et de ses dérivés première et seconde.

3) a- Faire la construction de Fresnel associée à l'équation différentielle précédente.

b- En déduire les valeurs de la constante **h** et de la masse **m**.

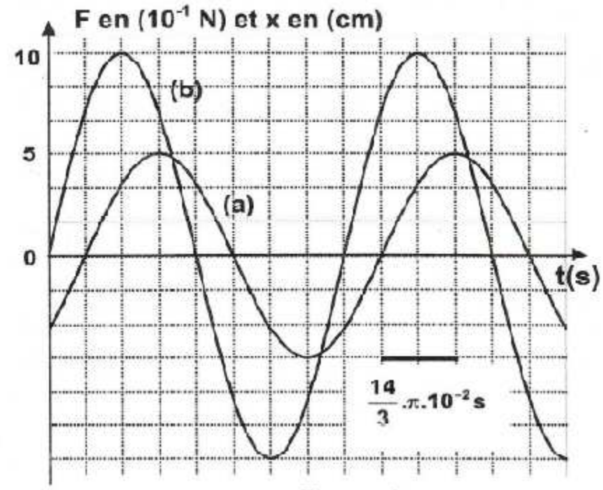


Figure 3

c- Montrer que $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{(2\pi Nh)^2 + (k - 4\pi^2N^2m)^2}}$

4) Pour une valeur N_1 de la fréquence **N**, le déphasage est : $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x = \dfrac{\pi}{2}$ **rad**.

a- En se référant à une analogie formelle électrique-mécanique, montrer que l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.

b- En déduire la valeur de N_1.

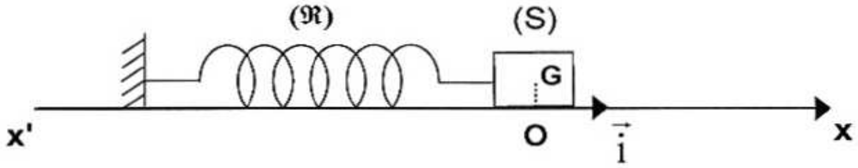
5) La masse **m** ne peut rester solidaire du ressort que pour une valeur de la tension du ressort ne dépassant pas **1,5** N. On fait diminuer la valeur de **h** jusqu'à atteindre la valeur $h_2 = 0,8$ N.m⁻¹.s. La résonance d'élongation est obtenue pour une fréquence $N_2 = 2,35$ Hz.

a- Déterminer la valeur de l'allongement maximal X_{2m} du ressort pour $N = N_2$.

b- Préciser, en le justifiant, si le solide reste attaché au ressort, dans ce cas.

Exercice III

On dispose d'un pendule élastique horizontal comportant un ressort **($\Re$)** et un solide **(S)** de masse m. L'une des extrémités de **($\Re$)** est fixe tandis que l'autre extrémité est attachée à **(S)**, comme le montre la figure ci-dessous. Le solide **(S)** est susceptible de glisser sur un plan horizontal, dans le repère galiléen $(O, \vec{i})$ confondu avec l'axe du ressort et dont l'origine **O** est la position de repos du centre d'inertie **G** de **(S)**. Le ressort **($\Re$)** a une raideur **k** et une masse négligeable devant celle de **(S)**.



I- On écarte le solide **(S)** de sa position de repos O en le déplaçant, suivant l'axe **x'x**, de manière à ce que le ressort **($\Re$)** se comprime d'une longueur **a**. A l'instant **t = 0 s,** on l'abandonne à lui-même, sans vitesse initiale.

Avec un dispositif approprié, on enregistre dans le repère $(O, \vec{i})$ le diagramme de mouvement du centre d'inertie **G** de **(S)**. Ainsi, on obtient l'une des courbes sinusoïdales de la figure 1 **(feuille annexe, page 5/6)**.

1) a- De telles oscillations de **(S)** sont dites libres. Justifier cette qualification.

b- Montrer que ces oscillations sont non amorties.

2) a- Calculer la phase initiale φ des oscillations de **(S)** et en déduire que c'est la courbe **2** qui représente le diagramme du mouvement de **(S)**.

b- Montrer que l'amplitude des oscillations est égale à la longueur **a** dont on a comprimé initialement le ressort.

- Déterminer graphiquement la valeur de l'amplitude **a** et celle de la période T_o des oscillations.

c- Calculer la valeur de la raideur **k** du ressort sachant que **m = 289 g**.

II- Au cours de son mouvement, le solide **(S)** est soumis maintenant à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, où **h** et $\vec{v}$ sont respectivement le coefficient de frottement et le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie G de **(S)**.

Pour entretenir ses oscillations, on soumet **(S)**, à l'aide d'un dispositif approprié, à une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_F)\vec{i}$. Ainsi, **(S)** se met à osciller à la période T et avec une amplitude X_m. Pour une valeur T_1 de T, les chronogrammes de **x(t)** et de **F(t)** sont représentés par les courbes sinusoïdales **I** et **II** de la figure 2 **(Annexe, page 5/6)**.

1) a- Sachant que l'élongation **x(t)** ne peut évoluer qu'en retard de phase par rapport à **F(t)**, montrer, parmi les courbes **I** et **II**, que c'est la courbe **I** qui représente **F(t)**.

b- A l'aide des graphiques de la même figure 2, écrire les expressions de **x(t)** et de **F(t)** tout en précisant les valeurs de leur fréquence N_1, de leur valeur maximale et de leur phase initiale.

2) a- Montrer qu'avec des excitations de période **T**, l'élongation **x** de **G**, sa vitesse instantanée $v = \frac{dx}{dt}$ et son accélération $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, vérifient à tout instant t la relation :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_F).$$

b- La construction de Fresnel inachevée de la figure 2 de la feuille annexe **(page 6/6 : feuille à remplir et à rendre avec la copie)** correspond aux oscillations forcées du pendule élastique à la période T_1. Compléter cette construction tout en l'annotant.

3) Déterminer (sans calcul) le sens dans lequel il faut faire varier la période **T** de l'excitateur à partir de la valeur T_1 pour obtenir une résonance d'élongation.