Exercice n°1 :

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}$ b) $z_2 = \left(\frac{1-i}{2-i}\right)^2$ c) $z_3 = \frac{(3+6i)(1+i)}{3-4i}$ d) $z_3 = (3+6i)(1+i)^2(1-i)$

2) Quelle est la partie réelle de $z = \frac{(1+i)\overline{(2-4i)}}{1-i}$.

3) Donner le module de nombre complexe $z = \frac{(1+i)\overline{(2-4i)}}{1-i}$.

4) Déterminer les ensembles des points M(z) tel que

a) $E = \{M(z)$ tel que : $|z+2i| = |z-1+i|\}$

b) $E = \{M(z)$ tel que : $\left|\frac{(1+i\sqrt{3})\bar{z}-1}{z+i}\right| = 2\}$

c) $E = \{M(z)$ tel que : $\arg(z-2i) \equiv \arg(1-i)(2\pi)\}$.

5) Soient A ,B et C trois points distincts du plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. On sait que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 3i$. On peut déduire :

a) A,B et C son alignés.
b) ABC est un triangle rectangle en A.
c) ABC est un triangle isocèle en A.

6) L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur est :

a) Un cercle privé d'un point.
b) Une droite privée d'un point.
c) Un segment privé de deux points.

Exercice n°2 :

1) Soient z et z' deux nombres complexes de module 1. On pose $Z = \frac{z+z'}{1+zz'}$, montrer que Z est réel.

2) Montrer que si $|z| = 1$ et $z \neq 1$ alors $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

Exercice n°3 :

Le plan P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne A,B et C d'affixes respectives 2i , iz et 2z avec z∈C.

1) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que A,B et C sont alignés.
2) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que ABC soit rectangle en B.

Exercice n°4 :

1) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}^*$ on a : $\frac{2z-1}{z^2}$ est réel si est seulement si $z=\bar{z}$ ou $z+\bar{z}=2z\bar{z}$.

2) En déduire l'ensemble des points M(z) tel que $\frac{2z-1}{z^2}$ est réel.

Exercice n°5 :

Le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A,M et M' d'affixes respectives 1,z et z'. Soit l'application f qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$on associe le point M' d'affixes z' tel que : $z'=\frac{z-1}{1-z}$.

1) Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
2) Calculer $|z'|$ et en déduire une interprétation de M'.
3) Montrer que $\frac{z'-1}{1-z}$ est réel , en déduire que les points A,M et M' sont alignés.
4) Déduire une construction de M' connaissant M.

Exercice n°6 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives $z_A = -1+3i$ et $z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3-3i}{2}$.

Soit *f* l'application du plan privé de *A* dans le plan qui, à tout point *M* d'affixe *z* distincte de z_A, associe le point *M*' d'affixe *z*' définie par : $z'=\frac{z+2}{z+1-3i}$.

1) Factoriser $z^2-3iz-2$ en remarquant que $z=i$ en est une solution, puis résoudre l'équation (E) : $z^2-3iz-2=0$.
2) Déterminer les affixes des points invariants par *f*.
   Déterminer l'ensemble des points *M* tels que *M* ' appartienne au cercle de centre O de rayon 1.
3) En posant $z=x+iy$, déterminer Im(*z*') en fonction de *x* et *y*. En déduire l'ensemble des points *M* tels que *M*' appartienne à l'axe des abscisses.
4) a) Montrer que pour tout *z* différent de $-1+3i$ on a l'équivalence suivante :

$$\frac{z+2}{z+1-3i}=-\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-z_C)(\overline{z-z_C})=\frac{5}{2}.$$

   b) En déduire l'ensemble des points *M* tels que *M*' ait une affixe imaginaire pure

Exercice n°7 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 3 cm.

À tout point *M* d'affixe *z* du plan, on associe le point *M'* d'affixe *z'* par l'application *f* qui admet pour écriture complexe : $z'=\frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$.

1) On considère les points *A*, *B*, *C* d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.

Déterminer les affixes des points *A'*, *B'*, *C'* images respectives de *A*, *B*, *C* par *f*. Placer les points *A*, *B*, *C*, *A'*, *B'*, *C'*.

2) On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels). Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3) Montrer que l'ensemble des points *M* invariants par *f* est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$. Tracer (D).

4) Soit *M* un point quelconque du plan et *M'* son image par *f*. Montrer que *M'* appartient à la droite (D).

5) a) Montrer que, pour tout nombre complexe z : $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}$. En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

b) En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (*OA*) et (*MM'*) sont parallèles.

Exercice n°8 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points *A* d'affixe i, *B* d'affixe $-2i$ et *D* d'affixe 1. On appelle *E* le point tel que le triangle *ADE* soit équilatéral direct. Soit *f* l'application qui à tout point *M* d'affixe *z* ($z \neq i$) associe le point *M'* d'affixe *z'* définie par $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.

1) Démontrer que le point *E* a pour affixe $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point *D'* associé au point *D* par l'application *f*.

3) a) Démontrer que, pour tout nombre complexe *z* différent de i, $(z'+2i)(z-i)=1$.

b) En déduire que pour tout point *M* d'affixe *z* ($z \neq i$) : $BM' \times AM = 1$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)(2\pi)$

4) a) Démontrer que les points *D* et *E* appartiennent au cercle (C) de centre *A* et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question 3. b, placer le point *E'* associé au point *E* par l'application *f*.

5) Quelle est la nature du triangle *BD'E'* ?

Exercice n°9 :

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on appelle *A* et *B* les points d'affixes respectives 2 et -2. À tout point *M* d'affixe *z*, *z* différent de 2, on associe le point *N* d'affixe $\bar{z}$ et *M'* d'affixe *z'* tel que $z' = \frac{2z-4}{\bar{z}-2}$.

1) Calculer *z'* et $|z'|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + i$.

2) a) Interpréter géométriquement $|z-2|$ et $|\bar{z}-2|$.

b) Montrer que, pour tout *z* distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de *M'*.

3) Déterminer l'ensemble *E* des points *M* d'affixe *z* ($z \neq 2$) tels que *M'* = *B*.

4) On note $Z_{\overrightarrow{AM}}$ et $Z_{\overrightarrow{BM}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$. Montrer que, pour tout point *M* distinct de *A* et n'appartenant pas *E*, le quotient $\frac{Z_{\overrightarrow{AM}}}{Z_{\overrightarrow{BM}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice n°10 :

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on appelle A et B d'affixes i et –i. On considère l'application f de $P\backslash\{A\}$ vers P qui a tout point d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-iz}{z-i}$.

1) a) Déterminer l'antécédent de i par f.
   b) Déterminer f (O).
   c) Montrer que f admet deux points fixes que l'on précisera.
2) a) Montrer que pour tout $z \neq i$. On a : $z' = \frac{-i(z+i)}{z-i}$.
   b) Vérifier que pour tout $z \neq i$ on a : $|z'| = \frac{BM}{AM}$ En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.
3) a) Vérifier que pour tout $z \neq i$ et $z \neq -i$ $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right)(2\pi)$.
   b) En déduire l'ensemble des points M d'affixes z tel que z' soit réel.

Exercice n°11 :

A tout complexe z différent de $3-i$ on associe le complexe $f(z) = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i}$.

1) Calculer $f(1+i)$.
2) Déterminer le complexe z tel que $f(z) = 1+i$.
3) On appelle x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z. Déterminer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(z)$.

Exercice n°12 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par : $Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1) a) Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe $-i$.
   b) Placer les points A, B et C.
2) Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.
   a) Montrer l'égalité : $Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$.
   b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.
   c) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que Z soit imaginaire pur.
3) a) Écrire le nombre complexe $(1 - i)$ sous forme trigonométrique.
   b) Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que Z est un réel non nul si et seulement $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{\pi}{4}(\pi)$.
   c) En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{\pi}{4}(\pi)$.