Nombres complexes

Forme algébrique d'un nombre complexe

1)Definition

Il existe un ensemble de nombres, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient IR

2. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i vérifiant $i^2 = -1$

3. L'addition et la multiplication ont les même propriétés de calcul dans $\mathbb{C}$ et dans IR.

Propriétés : Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$, a et b étant deux réels.

a est la partie réelle de z : $a = Re(z)$ et b est la partie imaginaire de z : $b = Im(z)$

$z = a + ib$ est la forme algébrique de z

Operations dans $\mathbb{C}$. Pour tous réels a, b, a' et b'

Addition . $(a+ib)+(a'+ib') = (a+a') + i(b+b')$.

Multiplication $(a+ib).(a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab'+ba')$.

Inverse d'un complexe non nul. Si de plus $a \neq 0$ et $b \neq 0$: $\frac{1}{a+ib} = \frac{1.\mathbf{(a-ib)}}{(a+ib)\mathbf{(a-ib)}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Conjugué : On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre complexe noté $\bar{z}$, défini par $\bar{z} = a - ib$

z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$, z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

Propriétés : $a = \text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $b = \text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$

« Le conjugué marche bien avec tout » :

Pour tous nombres complexes z et z' et $n \in IN$: $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$ et $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Pour tout nombre complexe non nul z, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$

Exemple. Pour a réel et z complexe

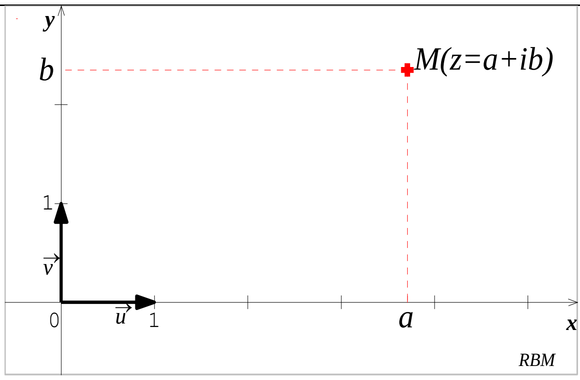
$\overline{5 - ai + 2z} = 5 + ai + 2\bar{z}$; $\overline{(a-3i)^2(1+ai)^7} = (a+3i)^2(1-ai)^7$

et $\overline{\left(\frac{z^4 + 1 + 3ai\bar{z}}{1 - iz}\right)^3} = \frac{(\bar{z}^4 + 1 - 3aiz)^3}{(1 + i\bar{z})^3}$

.

2) REPRESENTATION GEOMETRIQUE

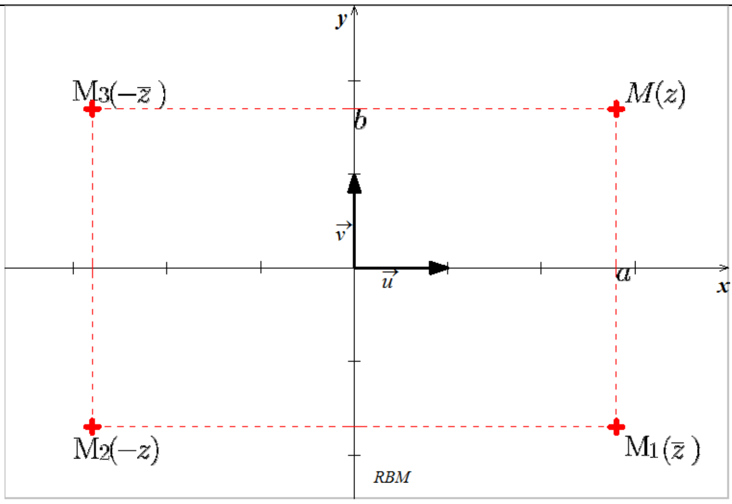
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$



- *A tout nombre complexe* $z = a + ib$ *est associé l'unique point* $M(a,b)$ *On dit alors que z est l'affixe de M. on note* z_M
- *A tout vecteur du plan* $\vec{w}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ *est associé un unique nombre complexe* $z_{\vec{w}} = \alpha + i\beta$ *l'affixe de* $\vec{w}$

  Si $I = A * B$ *alors* $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- *Si* $\vec{w} \neq \vec{0}$
- $\vec{v}, \vec{w}$ *sont colinéaires* $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{w}}}$ *est réel*
- $\vec{v} \perp \vec{w}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{w}}}$ *est imaginaire pure*

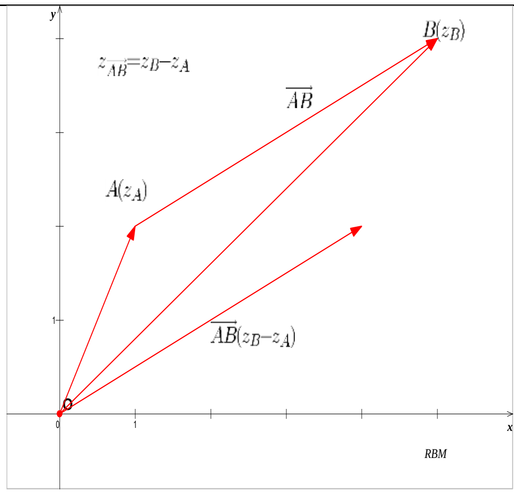
Opposé, conjugué d'un nombre complexe



z est réel $\Leftrightarrow$ *M(z) est sur l'axe des abscisses.*

$z \neq 0$ *,z est imaginaire pure* $\Leftrightarrow$ *M(z) est sur l'axe des ordonnées privé de l'origine.*

Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$



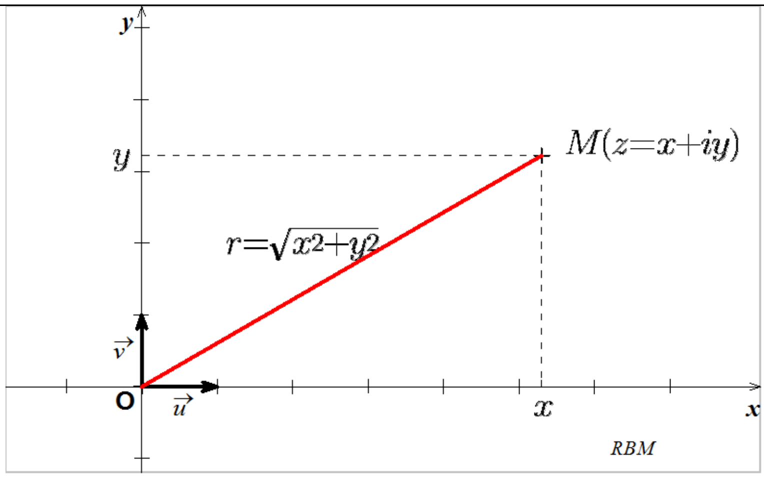
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *est* $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

$z_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}} = \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

1)Module :



Def *Soit* $M_{(z=x+iy)}$ *le module de z est :*

$$|z| = OM = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Prop : $z\bar{z} = |z|^2$

Si les points $A_{(z_A)}$ *et* $B_{(z_B)}$ *alors* $AB = |z_B - z_A|$

«Le module marche bien avec la multiplication»

Pour tous nombres complexes z et z' et

$n \in IN$: $|z.z'| = |z|.|z'|$ *et* $|z^n| = |z|^n$

Pour tout nombre complexe non nul z, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

«Le module ne marche pas bien avec l'addition»

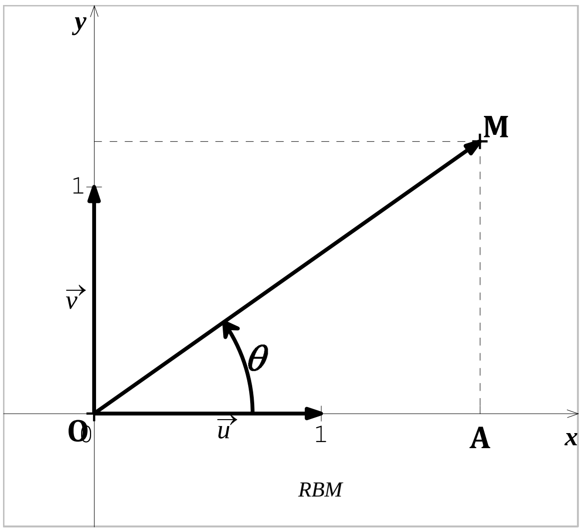
Pour tous nombres complexes z et z′ ,

$|z+z'| \le |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Exemple. $\left|\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3} = 2\sqrt{2}$

Pour a réel $\frac{|1+ai|}{|1-ai|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+(-a)^2}} = 1$;

2)Argument d'un nombre complexe non nul:



Soit $z \neq 0$ et M(z) On appelle argument de z une mesure θ en radian de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})$

$$\arg z = \theta \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})[2\pi]$$

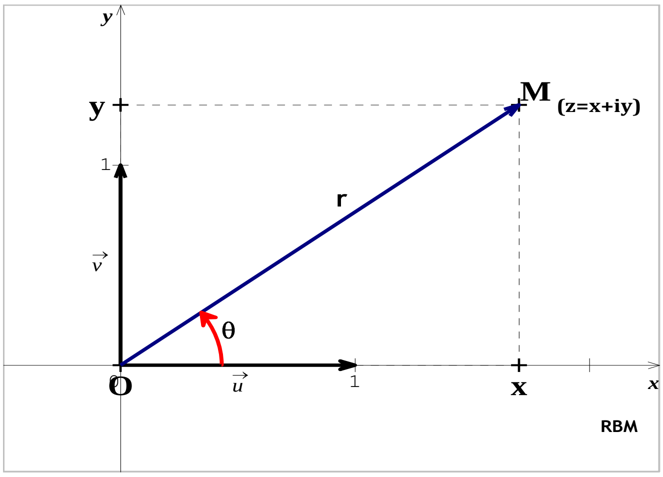
Prop : Pour z_1 et z_2 non nuls et $n \in Z$

- $\arg(z_1.z_2) = \arg z_1 . \arg z_2 + k2\pi$
- $\arg \frac{1}{z_1} = -\arg z_1 + k2\pi$
- $\arg(\frac{z_2}{z_1}) = \arg z_2 - \arg z_1 + k2\pi$
- $\arg z_1{}^n = n \arg z_1 + k2\pi$

Exemple

Z	5	-3	2i	-4i	1+i	-1-i	-1+i
argz							

3)Forme trigonométrique et exponentielle



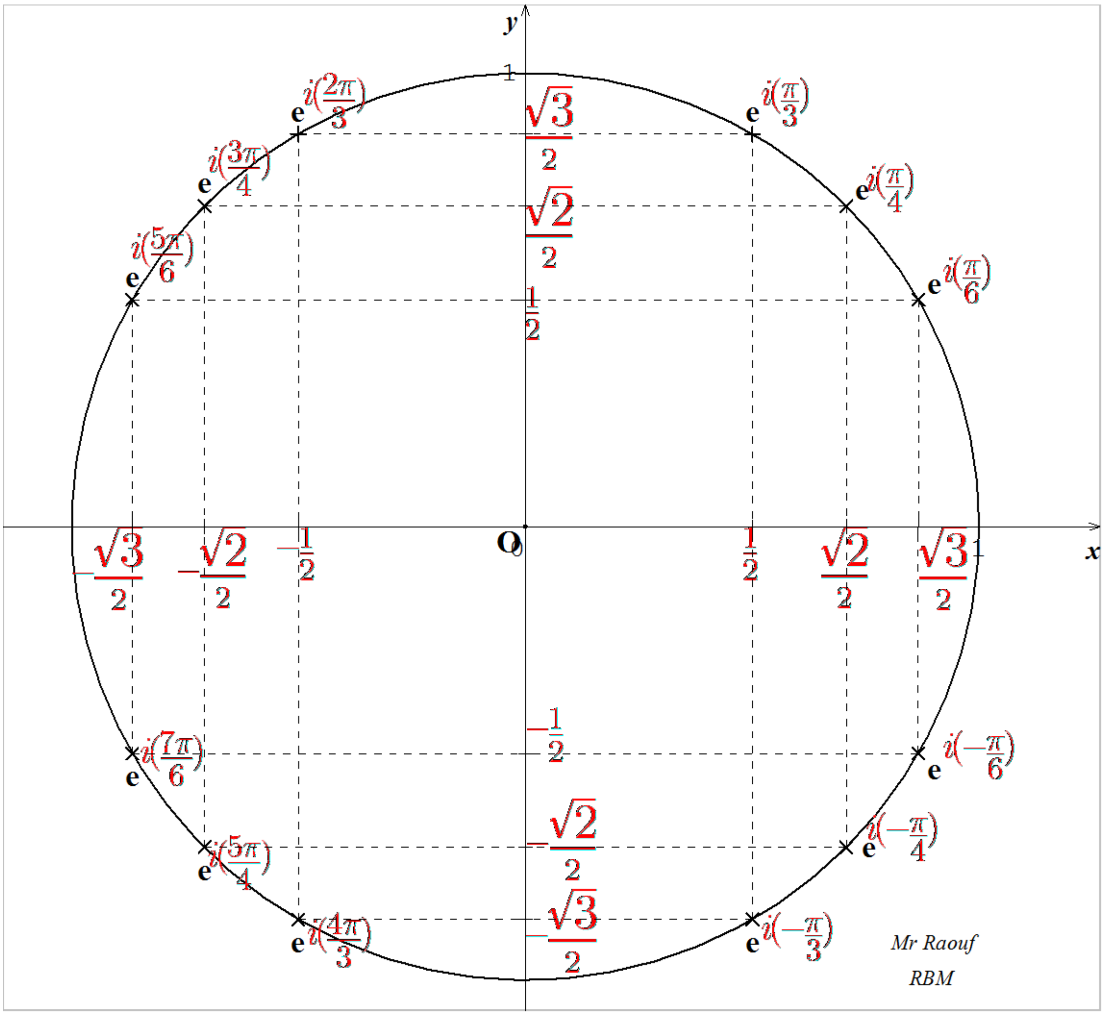
Forme	Ecriture de z
Algébrique	$x+iy$
Polaire	$[r,\theta]$
Trigonométrique	$r(\cos\theta+i\sin\theta)$
Exponentielle	$re^{i\theta}$

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

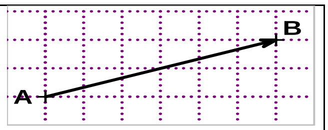
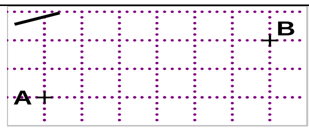
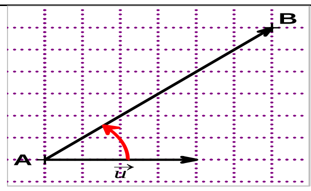
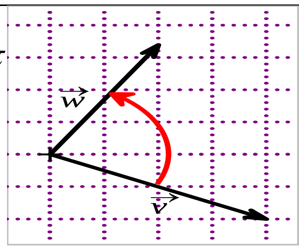
$\theta=\arg z$ est tel que :

$\cos\theta=\frac{x}{r}$ **et** $\sin\theta=\frac{y}{r}$

Les points remarquables du cercle trigonométrique



4)Vision géométrique

affixe d'un vecteur	$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$	
Longueur d'un segment	AB=$\lvert z_B - z_A \rvert$	
angle entre $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{AB}$	$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A) + k2\pi$	
angle entre deux vecteurs	$(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = \arg(\frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{v}}}) = \arg z_{\vec{w}} - \arg z_{\vec{v}} + k2\pi$ $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) + k2\pi$	

Racine n^ieme et Le second degré

cherche z une racine carré(resp 3^ieme) de **Z** revient a résoudre l'équation : z^2**=Z** **(**resp z^3**=Z)**

$z^2 = a = \lvert a \rvert e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = \mp\sqrt{\lvert a \rvert} e^{i\frac{\alpha}{2}}$	$z^n = a = \lvert a \rvert e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{\lvert a \rvert} e^{i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)}$

Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, a, b et c étant des nombres complexes ,avec $a \neq 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ puis on cherche δ une racine carré de Δ $(\delta^2 = \Delta)$ les solutions sont $z' = \frac{-b + \delta}{2a}$; $z'' = \frac{-b - \delta}{2a}$

Conséquences

$az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$	$S = z' + z'' = \frac{-b}{a}$	$P = z'.z'' = \frac{c}{a}$
$Si\ a + b + c = 0\ alors\ z' = 1\ et\ z'' = \frac{c}{a}$	$Si\ a - b + c = 0\ alors\ z' = -1\ et\ z'' = \frac{-c}{a}$	
$Si\ z' = m\ est\ une\ solution\ alors\ l'autre\ solution\ est\ z'' = \frac{P}{m}$		