| | | |
|---|---|---|
| Lycée Tahar Sfar Mahdia | **Devoir de synthèse n° 3** Mathématiques | Classe : 4 ème Sc exp1 |
| Date : 16 / 05 / 2011 | Prof : Meddeb Tarak | Durée : 3 heures |

## Exercice n°1 : (3 pts )

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte.

On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \ln\left(1+e^x\right)\right)$ est égale à :

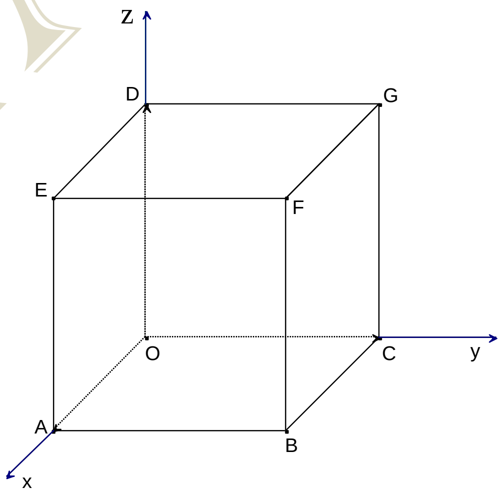
   $a/\ 0$ $\quad$ $b/\ +\infty$ $\quad$ $c/\ -\infty$

2) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ est égale à :

   $a/\ 0$ $\quad$ $b/\ +\infty$ $\quad$ $c/\ -\infty$

$OABCDEFG$ est un cube d'arrête $1$.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$




3) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CE}$ est égale à :

   $a/\ 0$ $\quad$ $b/\ \sqrt{2}$ $\quad$ $c/\ \sqrt{3}$.

4) Une équation du plan $(ADF)$ est :

   $a/\ x + z - 1 = 0.$

   $b/\ 2x - y - 2 = 0.$

   $c/\ x - y + z - 1 = 0.$

## Exercice n°2 : (5 pts )

1) $a/$ Montrer que, pour tout réel $\theta$ on a : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

   $b/$ On considère le nombre complexe $z = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ .

   Vérifier que $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   $c/$ Ecrire $z$ sous la forme exponentielle.

   $d/$ Montrer alors que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2) Soit $\theta$ un réel de l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$.

   Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 3 + 2e^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0.$$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $A$, $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectives $z_A=1$, $z_1=1+e^{i\theta}$ et $z_2=3-e^{i\theta}$.

$a/$ Montrer que $M_1$ et $M_2$ sont symétriques par rapport à un point fixe $I$ que l'on précisera.

$b/$ calculer $|z_1-1|$, en déduire que $M_1$ appartient à un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

$c/$ Construire les points $M_1$ et $M_2$ dans le cas où $\theta=\frac{\pi}{6}$.

4) $a/$ Montrer que, pour tout $\theta\epsilon[0,\pi]$ on a : $M_1M_2=4\sin\frac{\theta}{2}$.

$b/$ Déterminer la valeur de $\theta$ pour que la distance $M_1M_2$ soit maximale.

## Exercice n°3 : (5 pts)

1) Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=xe^{-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

$a/$ Dresser le tableau de variations de $f$.

$b/$ Ecrire une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

$c/$ Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $T$.

2) On considère la suite $U$ définie sur $IN$ par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=U_n\, e^{-U_n}, \quad n\in \mathrm{IN} \end{cases}$

$a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, $0<U_n\leq 1$.

$b/$ Montrer que la suite $U$ est décroissante.

$c/$ En déduire que $U$ est convergente et calculer sa limite.

3) Soit, pour tout $n\in IN$, $W_n=\ln U_n$.

$a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, on a : $W_n-W_{n+1}=U_n$.

$b/$ On pose : $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_{n-1}$, $n\geq 1$.

Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $S_n=-W_n$.

$c/$ Déterminer la limite de la suite $(S_n)$.

## Exercice n°4 : (7 pts)

**A-** Soit $\varphi$ la fonction définie sur $IR$ par : $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1) $a/$ Déterminer les limites de $\varphi$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$b/$ Etudier les variations de $\varphi$ sur $IR$.

2) $a/$ Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions dans $IR$, dont l'une dans l'intervalle $[1,+\infty[$, qui sera notée $\alpha$.

$b/$ Vérifier que : $1{,}7<\alpha<1{,}8$.

3) Tracer la courbe $\Gamma$ représentation graphique de $\varphi$ dans un repère orthogonal.

**B-** Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Les fonctions $f$ et $g$ sont définies sur $IR$ par :

$$f(x)=(2x+1)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

1) Démontrer que les deux courbes passent par le point $A(0,1)$ et admettent en ce point la même tangente.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x \in IR$, $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ . où $\varphi$ est la fonction étudiée dans la partie **A.**

$b/$ Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ .

3) On considère les intégrales :

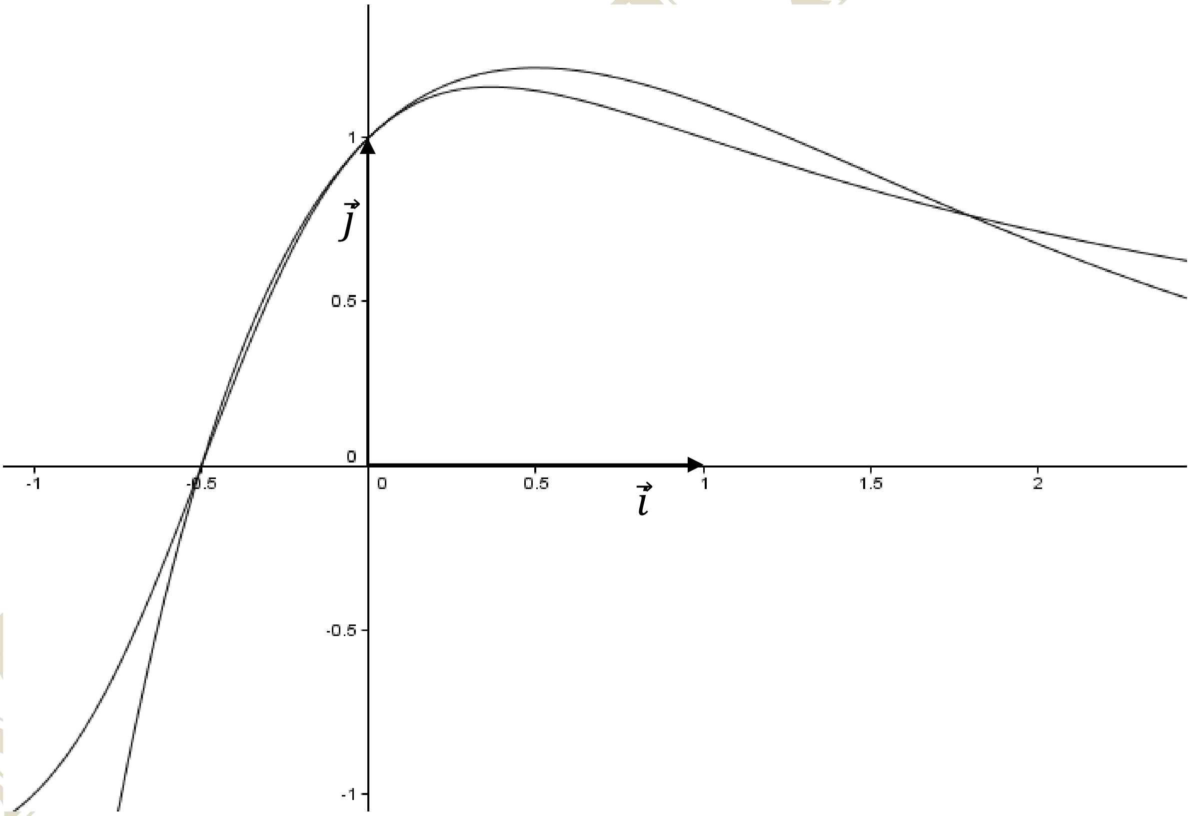
$F=\int_0^\alpha f(x)dx$ et $G=\int_0^\alpha g(x)dx$ où $\alpha$ est le réel défini dans la partie **A.**

$a/$ Calculer $G$ et montrer que $G=\alpha$ .

$b/$ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F=(-2\alpha-3)e^{-\alpha}+3$ .

$c/$ On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région du plan délimitée par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\alpha$.

Montrer que : $\mathcal{A}=\dfrac{-\alpha^2(\alpha-2)}{\alpha^2+\alpha+1}$.




*Bonne chance*