Lycée de Souassi

***

DEVOIR DE CONTROLE N° 3

***

18/04/2009

SECTIONS : 4^{éme} *Sciences Expérimentales* **1**
EPREUVE : *Mathématiques*
DUREE : 2 *heures*
PROFESSEUR : *Mr FLIGENE Wissem*

Exercice 1: (3 pts)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.
Barème : *Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point et une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.*

1. Pour tous réels *a* et *b*, strictement positifs, $\ln(ab)-\ln(a^2)$ est égal à :

   a) $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ b) $\ln(b-a)$ c) $\frac{\ln b}{\ln a}$

2. $e^{-2\ln 3}$ est égal à :

   a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) 9

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $e^{3x}-1\geq 0$ est l'intervalle

   a) $[0,+\infty[$ b) $[1,+\infty[$ c) $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

Exercice 2: (6 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln x+2x^2-3$.
   Le tableau de variation de la fonction *g* est donné ci-dessous :

x	0		α	$+\infty$
g	||	$-\infty$	0	$+\infty$

   En utilisant une calculatrice on a obtenu $\alpha\approx 1,19$.
   Dresser le tableau donnant le signe de la fonction *g* sur l'intervalle $]0,+\infty[$

2. On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x}+2x-5$.
   On note C_f la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Déterminer la limite de la fonction *f* à droite en 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction *f* en + ∞.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f*.
   a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel *x* de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$
   b) En déduire le tableau de variations de *f*.
   c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel *x* supérieur ou égal à e.
   d) Montrer que la droite $D: y = 2x - 5$ est une asymptote à C_f
   e) Tracer la courbe représentative de *f* dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

4. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=(\ln x)^2$.
   a) Calculer la dérivée h' de *h*.

b) En remarquant que pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a : $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{2}h'(x)+2x-5$, trouver une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

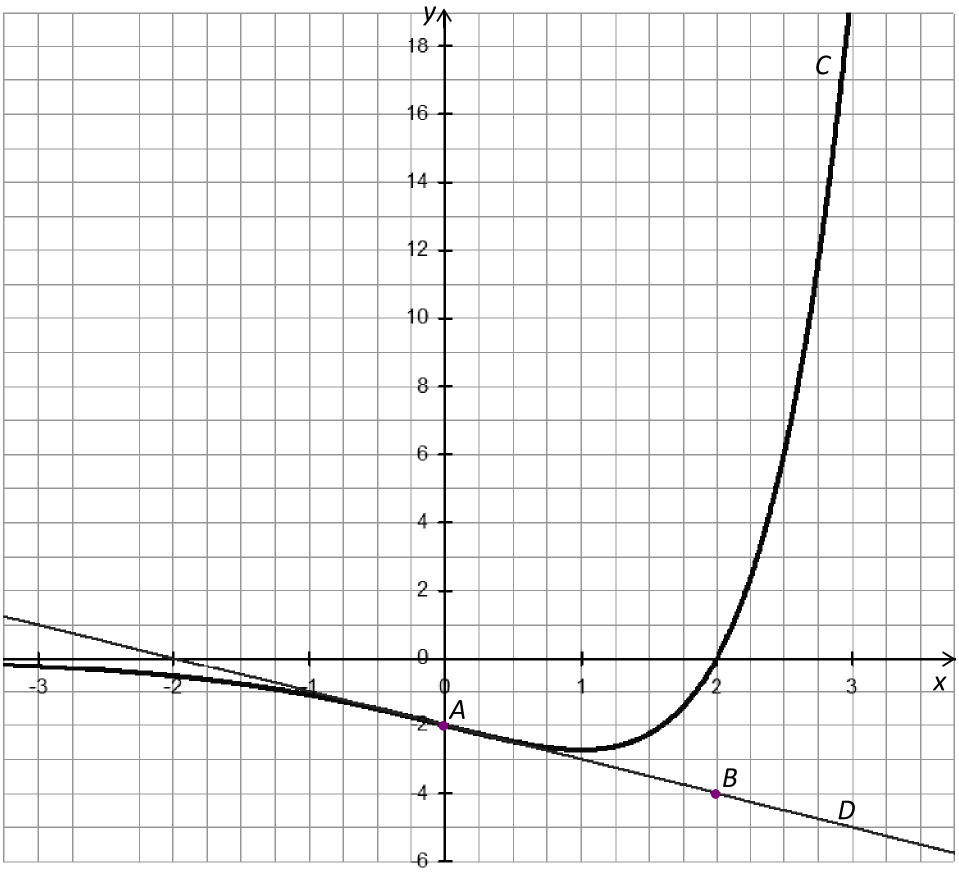
c) Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\mathrm{e}$ et $x=\mathrm{e}^2$ (*On donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale arrondie au dixième*).

Exercice 3: (6 pts)

PARTIE A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe C ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

La tangente D à la courbe C au point $A(0,-2)$ passe par le point $B(2,-4)$.



On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. a) Donner la valeur de $f(0)$.
   b) Justifier que : $f'(0)=-1$.
2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x)=(x+a)\mathrm{e}^{bx}$.
   a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x)=(bx+ab+1)\mathrm{e}^{bx}$.
   b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^{x}$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. a) Calculer $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Préciser le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle [2 , 3].
Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_2^3 f(x)\,dx$

Exercice 4: (5 pts)

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'adhérents en fonction du rang x de l'année.

PARTIE A : un ajustement affine.

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 adhérents sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série (x_i, y_i)
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Interpréter le résultat
3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et la tracer sur le graphique précédent (*les coefficients seront arrondis à l'unité*).
4. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2009.

PARTIE B : un ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln y$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248					

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).
3. En déduire une approximation du nombre d'adhérents y en fonction du rang x de l'année.
4. En prenant l'approximation $y \approx 57{,}1\,e^{0{,}224x}$ et en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2009.

PARTIE C : comparaison des ajustements.

En 2009, il y a eu 430 adhérents. Lequel des deux ajustements semble le plus pertinent ? Justifier la réponse.

Correction

Solution-Exercice 1

1) a) 2) b) 3) a)

Solution-Exercice 2

1-

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

2- a) $\lim_{0^+} f = +\infty$

b) $\lim_{+\infty} f = +\infty$

3) a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} + 2 = \frac{\ln x + 2x^2 - 3}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b) signe$(f'(x))$ = signe$(g(x))$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

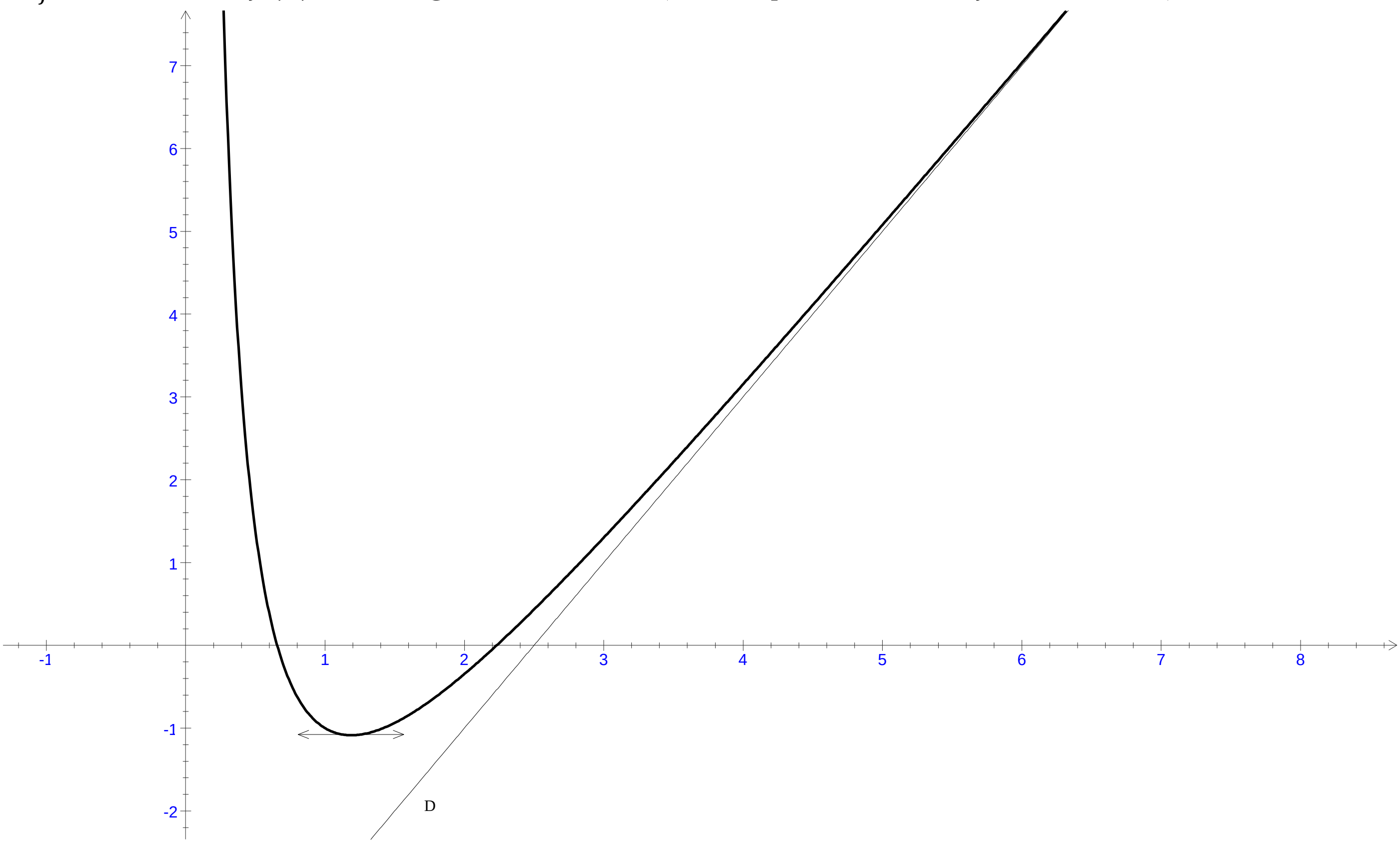
c) $e \in [\alpha,+\infty[$ et f est strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$, alors si $x \geq \alpha$ alors $f(x) \geq f(\alpha)$

or $f(\alpha) = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} + 2e - 5 = 2e + \frac{1}{e} - 5 \approx 0{,}7 > 0$ donc $f(x) > 0$

d) $\lim_{+\infty}[f(x) - (2x-5)] = \lim_{+\infty} \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} = 0 - 0 = 0$ donc $D: y = 2x - 5$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

e) * $(O,\vec{j}): x = 0$ est une asymptote verticale à C_f

* C_f admet en $S(\alpha, f(\alpha))$ une tangente horizontale (notons que $\alpha \approx 1{,}19$ et $f(\alpha) \approx -1{,}08$)



4- a) h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x = 2\frac{\ln x}{x}$

b) $F(x) = 2ln|x| - \frac{1}{2}h(x) + x^2 - 5x$ or $x > 0$ alors $|x| = x$ et par suite $F(x) = 2lnx - \frac{1}{2}h(x) + x^2 - 5x$

c) $\mathcal{A} = \int_e^{e^2} f(x)dx$ (puisque $f(x) > 0$, pour tout $x \geq e$) donc $\mathcal{A} = [F(x)]_e^{e^2} = F(e^2) - F(e)$

or $F(e^2) = 2\ln(e^2) - \frac{1}{2}(\ln(e^2))^2 + \mathrm{e}^4 - 5\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^4 - 5e^2 + 2$

et $F(e) = 2\ln(e) - \frac{1}{2}(\ln(e))^2 + \mathrm{e}^2 - 5e = e^2 - 5e + \frac{3}{2}$

ainsi : $\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{e}^4 - 6e^2 + 5e + \frac{1}{2} \approx 24{,}4\, u.a}$

Solution-Exercice 3

PARTIE A

1- a) $f(0) = -2$

b) $f'(0)$ est la pente de D donc $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4+2}{2-0} = -1$

2- a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{bx} + be^{bx}(x + a) = (1 + bx + ab)e^{bx} = (bx + ab + 1)e^{bx}$

b) $f(0) = -2 \Leftrightarrow \boxed{a = -2}$

$f'(0) = -1 \Leftrightarrow -2b + 1 = -1 \Leftrightarrow -2b = -2 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$

PARTIE B

1- $f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$ donc signe $(f'(x)) =$ signe$(x-1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

2- a) $\lim_{+\infty} f = +\infty$

b) $\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} x\,e^x - e^x = 0 - 0 = 0$ alors $(O, \vec{\imath})$: $y = 0$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

3- a) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x-2)e^x dx$

Soit $u(x) = x - 2 \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

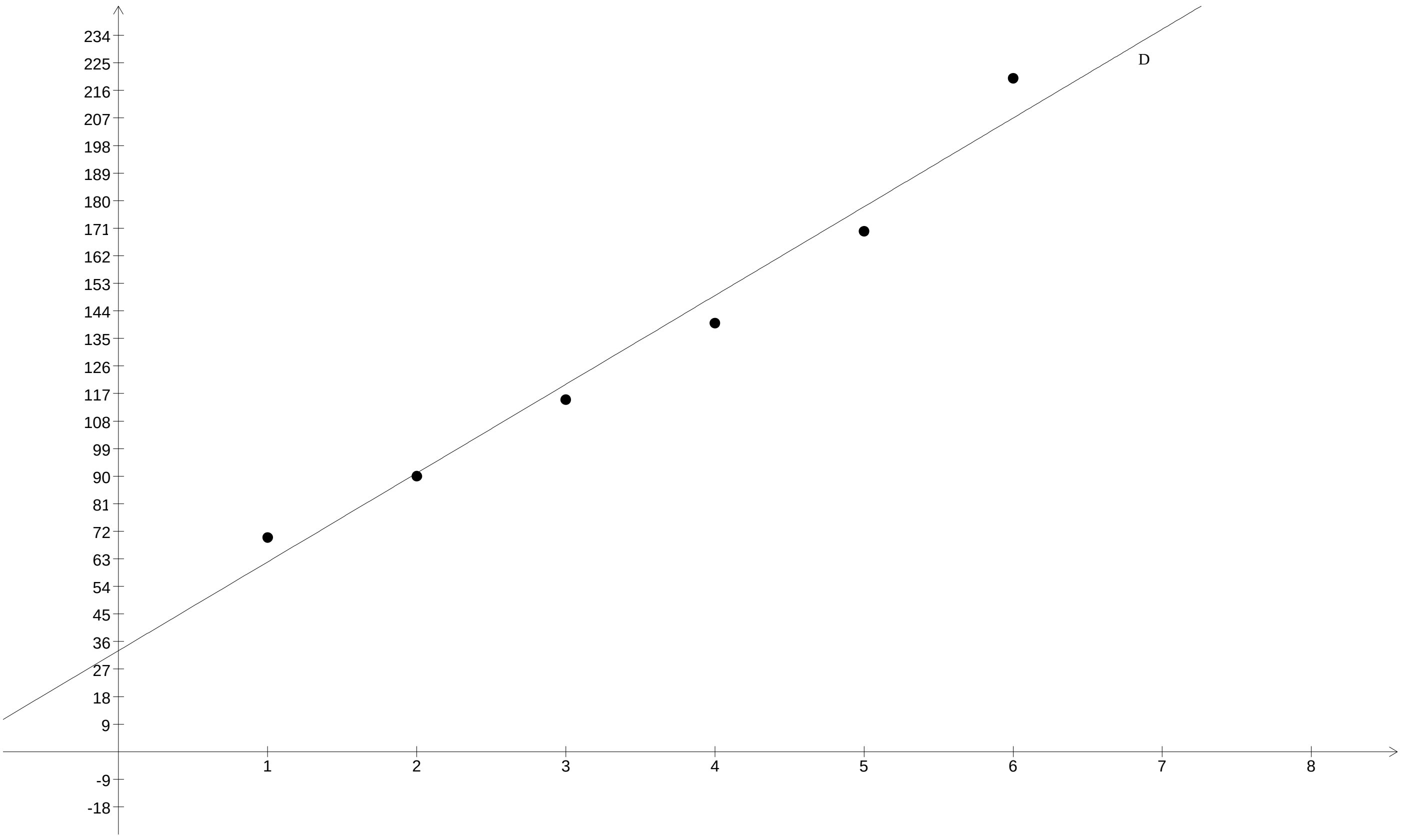
Donc $\int_2^3 f(x)dx = [(x-2)e^x]_2^3 - \int_2^3 e^x\,dx = e^3 - [e^x]_2^3 = e^3 - (e^3 - e^2) = e^2$

b) signe$(f(x))$ = signe$(x-2)$ et pour tout $x \in [2{,}3]$: $x - 2 \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$

$\int_2^3 f(x)\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$

sSolution-Exercice 4

PARTIE A



2- $\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0{,}98$ (d'après la calculatrice)

$|\rho_{XY}| = 0{,}98 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire est forte donc un ajustement affine est justifié

3- $D: y = a(x - \bar{X}) + \bar{Y}$ où $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} = 29$ d'où $\boxed{D: y = 29x + 33}$

4- Le rang de l'année 2009 est 9 donc $y = 29 \times 9 + 33 = 294$ adhérents

PARTIE B

1-

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248	4,5	4,745	4,942	5,136	5,394

2- $z = a'(x - \bar{X}) + \bar{Z}$ où $a' = \frac{cov(X,Z)}{V(X)} = 0{,}224$ donc $z = 0{,}224x + 4{,}044$

3- comme $z = lny$ alors $lny = 0{,}224x + 4{,}044 \Leftrightarrow y = e^{0{,}224x+4{,}044} \Leftrightarrow y = e^{4{,}044}e^{0{,}224x}$ $donc$
$y = 57{,}054\, e^{0{,}224x}$

4- pour$x = 9$, $y = 57{,}054\, e^{0{,}224\times 9} \approx 429$ adhérents

PARTIE C

429 est proche de 430 donc l'ajustement exponentiel semble le plus pertinent