Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

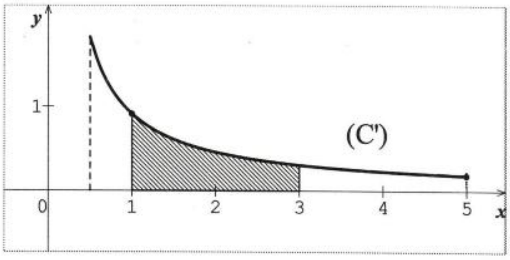
Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

1) Pour tout $x>0$, $f'(x)\geq 0$.
2) Pour tout $x>0$, $f(x)\geq 0$.
3) $f(2)\leq \ln 2$.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1,0) et B(3, 1). Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f ' de la fonction f.



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.

2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.

3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

4) Pour tous a et b de [1,3], $|f(b)-f(a)|\leq|b-a|$.

Exercice 3 : (Contrôle 2008)

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^n\,dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\geq 0$.

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que (I_n) est une suite convergente.

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (I_n).

3) Calculer I_1, I_2 et I_4.

Exercice 4 : (Contrôle 2011)

1) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle [a, a+1].

   a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a+1}$.

   b) Déduire que $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$. (1)

2) Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

   a) Montrer, en utilisant (1), que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$.

   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{S_n}$.

3) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $U_n = S_n - \ln(n)$

   a) Montrer que la suite (U_n) est minorée.

   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

Exercice 5 : (Problème)

A/- Soit g :fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = Lnx + x - \frac{2}{x}$

1/- calculer $\lim_{0^+} g$ et $\lim_{+\infty} g$.

2/-Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer g'(x) .

3/- Dresser le tableau de variations de g .

4/-Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera .

5/-a- En déduire que g(x)=0 admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$.

b- Vérifier que $\alpha \in [1,2]$.

c- En déduire un encadrement de α d'amplitude 0.1 .

6/- Déduire alors le signe de g .

B/- soit f : la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{Lnx - x}{\sqrt{x+1}}$

Prof : Med Khairedine

1/- calculer $\lim_{0^+} f$ et $\lim_{+\infty} f$.

2/- Etudier les variations de f.

3/-a- Vérifier que $f(\alpha) = \frac{2-2\alpha^2}{\alpha\sqrt{\alpha+1}}$.

b-En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4/- Tracer C :la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct .

C/- Le but de cette partie est l'étude de la convergence de la suite réelle S définie par :

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$ pour tout n >0 .

1/- soit ϕ définie sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *par* $\phi(x) = \sin x$.

Montrer que ϕ est une bijection de $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2/- soit ϕ^{-1} la réciproque de ϕ . Démontrer que ϕ^{-1} est dérivable sur]-1,1[

Et que $(\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3/- On pose $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour x appartenant à [0,1[

Montrer que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(\frac{k}{n})$ $\forall$ n >0 .

4/- En utilisant la croissance de h sur [0,1[(et sachant qu'elle est intégrable au voisinage de 1)

Démontrer que

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x)dx \leq \frac{1}{n} h(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x)dx$$

5/- En déduire alors que :

$$\int_0^{\frac{n-1}{n}} h(x)dx \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} h(x)dx$$

6/- En s'inspirant des résultats précédents :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.