Prof : Med Khairedine	**Série 12**	**Niveau : Bac**

Exercice 1 :

A/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Interpréter les résultats graphiquement.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et que $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit h la restriction de f à $]0,1[$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $]0,1[$ sur un ensemble J que l'on précisera.

b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $]0,1[$ une seule solution α et que $0.5<\alpha<0.6$.

c. En déduire que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera.

4. Tracer C_f.

5. Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h^{-1} puis déduire le tableau de variation de la fonction h^{-1}.

6. a. Montrer que $h'(\alpha)=-\frac{\alpha+1}{\alpha^3}$.

b. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et exprimer $\left(h^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α.

B/ Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=2f\left(x^2\right)$.

On désigne par C_g la courbe représentative de f dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$

2. En déduire la position relative de C_f et C_g sur $]1,+\infty[$.

3. Soit $x\in[2,+\infty[$, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g d'abscisse x.

Pour quelle valeur de x, la distance NM est maximale ?

Exercice 2 :

A/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1. Etudier le sens de variation de g.

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

B/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$.

On note C la courbe de f dans un repère orthogonal. (unité 2 cm sur l'axe (Ox), 4 cm sur l'axe (Oy)).

1. Etudier les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.

2. Montrer que pour $x>0$, $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\times g(x)$

En déduire le signe de $f'(x)$.

3. Dresser le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4. Tracer la courbe C et préciser la tangente à C au point d'abscisse 1.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la fonction dérivée de f.

b. Calculer alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

2. Etudier f et tracer (C).

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe de la fonction f^{-1}.

c. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

En déduire $\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx$.