

Exercice n° 1 :

Choisir la bonne réponse : z étant un nombre complexe.

1. La partie imaginaire de i est :

- (a) 1 (b) i (c) 0 .

2. $z + \bar{z}$ est :

- (a) réel (b) imaginaire pur (c) nul.

3. $z - \bar{z}$ est :

- (a) réel (b) imaginaire pur (c) nul.

4. $z \times \bar{z}$ est :

- (a) imaginaire pur (b) réel négatif (c) réel positif.

5. L'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = iz$ est :

- (a) $\{0\}$ (b) $\{i\}$ (c) $\{0; i\}$.

Exercice n° 2 :

On considère les deux suites récurrentes (v_n) et (w_n) telles que :

$$v_0 = 1, w_0 = \sqrt{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2} \\ w_{n+1} = \frac{v_n + \sqrt{2}w_n}{1 + \sqrt{2}} \end{cases} .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = w_n - v_n$.

a. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq w_n$.

c. Etablir que la suite (v_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

d. En déduire que les deux suites (v_n) et (w_n) convergent et ont la même limite.

Exercice 3 : (Voir Annexe)

Pour crypter (rendre secret) un message, on procède de la manière suivante :

A chacune des 26 lettres de l'alphabet, on associe un entier $n \in \{0;1;\dots;25\}$ dans le même ordre que celle -ci.

Le reste r de la division de l'entier ($m = 5n + 2$) par 26 associe la lettre correspondante.

Exemple : pour crypter la lettre E, on procède comme suit :

1^{ère} étape: on associe à E l'entier 4 .

2^{ème} étape: le reste de la division de $(5 \times 4 + 2) = 22$ par 26 est 22 .

3^{ème} étape : on associe 22 à W.

Ainsi, E est crypté en W.

1. Crypter le mot « ENNEMI »

2. On se propose de décrypter le mot « CKQ ».

2. a Résoudre dans \mathbb{Z}^2 chacune des équations suivantes:

(i) $5x - 26y = 0$.

(ii) $5x - 26y = 8$. (remarquer que $(12, 2)$ est une solution).

(iii) $5x - 26y = 14$. (poser $z = 2y + 1$, résoudre $5x - 13z = 1$ puis $5t - 2y = 1$).

2. b Prouver que chacune de ces équations admet une solution unique (x, y)

vérifiant $0 \leq x \leq 25$.

2. c Décrypter le mot « CKQ ».

Exercice n° 4 :

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$ (\mathcal{E}_1)

2. On considère dans \mathbb{C} , l'équation : $z^3 - (3 + 5i)z^2 + (-5 + 10i)z + 7 + i = 0$ (\mathcal{E})

2. a Vérifier que i est une solution de l'équation (\mathcal{E}).

2. b Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (\mathcal{E}) .