Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série n°15 :** **Fonction Logarithme**	$4^{ème}$ Sc-exp **Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \ln^2 x - 3\ln x + 1$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x - 2\ln x}$	$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2+\frac{1}{x}\right)}{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$	$\lim_{x\to 0^+} \ln^2 x - \ln x$	$\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{1+\ln^2 x}$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$	$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)\ln x$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

Exercice n°2 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifié ne sera pas prise en compte toute trace de recherche sera valorisée.

Affirmation n°1 : La valeur exacte de l'intégrale $I = \int_1^e (t^2 \ \ln t)\ dt$ est $I = \frac{2e^3+1}{9}$.

Affirmation n°2 : Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x$.Une primitive F de f sur $]0,+\infty[$ et qui prend la valeur -1 en 1 est $F(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Affirmation n°3 : $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$.

Affirmation n°4 : Soit la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln\sqrt{x}}$ .Soit (C) sa courbe représentative .La droite $y = \frac{1}{2}x$ est un asymptote à (C) au voisinage $+\infty$.

Affirmation n°5 : La dérivée de la fonction $f(x) = (t^2-1)^{2014} \times (\ln t)^n - \ln(x)$ est : $f'(x) = 2nt^{2013} \times (\ln t)^n - \frac{1}{x}$.

Exercice n°3 :

Soit g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + 2\ln x$

1) a) Etudier les variations de g.

   b) En déduire le signe de g sur $[0,+\infty[$

2) Soit f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 1 - x + (2x-1)\ln x$.

a) Etudier les variations de f.

b) Etudier la position relative de C_f par rapport à $\Delta : y = x$.

Exercice n°4 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer f ‘(x).
   b) Déterminer alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.
2) Etudier f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Tracer la courbe de la fonction f^{-1}.
4) a) A l'aide d'une intégration par partie calculer $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx$.
   b) En déduire $\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x\ \ln(x+1)$.

C_f désigne la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2) b) L'axe des abscisses est il tangent à la courbe C_f au point O ?
3) a) Dresser le tableau de variation de f
4) b)Tracer C_f.
5) Montrer que l'équation f (x) =0,25 admet une seule solution sur [0,1] ,on note α cette solution .Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
6) a) Déterminer trois réels a , b et c tel que pour tout x ≠-1 $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
7) b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\ dx$.
8) A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2,calculer en unités d'aires l'aire $\mathcal{A}$ de la partie limitée par la courbe (C) et les droites d'équations x=0 ; x=1 et y=0.
9) La suite (I_n) est définie sur IN par : $I_n = \int_0^1 x^n\ \ln(x+1)\,dx$
10) a) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).La suite (I_n) est t-elle convergente ?
11) b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul $0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.
    En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice n°6 :

On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln^3(x) - 3\ln(x)$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2) Soit g la restriction de f sur $[\frac{1}{e}, e]$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, e]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Tracer (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ dans un autre repère.

3) Soit la suite (a_n), pour $n \in \mathbb{N}^*$ définie par : $a_n = \int_1^e (\ln t)^n \, dt$.

   a) Calculer a_1.

   b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = e - (n+1)\, a_n$.

   c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.

4) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(C_{g^{-1}})$ et les droites $y = e, x = -2$ et x=0.

   a) Calculer $\int_1^e f(t)\, dt$.

   b) En déduire $\mathscr{A}$.

Exercice n°7 :

1) Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x + (x-2)\ln x$.

   a) Calculer g '(x).

   b) Dresser le tableau de variation de g ,et déduire que pour tout x>0 ,$g(x) \geq 0$.

2) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$.

   a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à préciser.

3) On note (C) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm).

   a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.

   b) Etudier le sens de variation de h(x)=x -1- lnx pour x>0.

   c) En déduire le signe de h(x) et déterminer la position relative de (C) et T.

4) Tracer (C) et (C') la courbe de f^{-1}.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C').Calculer à 10^{-3}prés la valeur de $\mathscr{A}$.

Exercice n°8 :

Partie A

On considère une fonction *g* définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}\ ; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + a\,x - \ln(2x+b)$,

où a et b sont deux réels.

Calculer *a* et *b* pour que la courbe représentative de *g* dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}\ ; +\infty[$ par : $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$.

On admet que f est dérivable et on note *f'* sa dérivée.

Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}+\ln(\frac{1}{2})$	$\searrow$	$-\infty$

1) Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans l'intervalle $]-\frac{1}{2}\ ; +\infty[$
3) b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4) Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}\ ; +\infty[$.

Exercice n°9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On appelle f_n la fonction définie sur$[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$

et on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de f_1 sur $[0\ ; +\infty[$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq I_n \leq \ln 2$.

b) Étudier les variations de la suite I_n.

c) En déduire que la suite I_n est convergente.

Exercice n°10 :

Partie A

Soit a et b deux réels strictement positifs , avec $a \leq b$.

1) Montrer en appliquant les inégalités des accroissements finis que :

$$1-\frac{a}{b} \leq \ln b-\ln a \leq \frac{b}{a}-1$$

2) En déduire que pour tout x>0 , $1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ (Indication :distinguer deux cas $x \geq 1$ et $x \leq 1$).

Partie B

On considère la fonction f définie sur IR₊ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln(x) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de et la dérivabilité de f en 0.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer en utilisant **Partie A** que $x-1 \leq f(x) \leq x^2-x$; $x \geq 0$.
4) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé ,unité 2cm.

Partie C

1) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.
2) a) Montrer que $\alpha_1-1 \leq 1 \leq {\alpha_1}^2-\alpha_1$

b)En déduire que :$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \alpha_1 \leq 2$

3) Comparer $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.En déduire que (α_n)est décroissante.

4) a) Montrer que (α_n) est convergente .On notera ℓ sa limite.

b) Prouver que $f(\ell)=0$.

c)En déduire la valeur de ℓ .

Exercice n°11 :

Soit la fonction définie sur IR par $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$.Soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que la droite D :y=1 est un axe de symétrie de la courbe (C).

c) Préciser la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

d) Tracer (C).

2) Soit F la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $F(x)=\int_1^{1+\mathrm{tg}x}\frac{dt}{t^2-2t+2}$.

a) Montrer que F dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et que F '(x) = 1.

b) En déduire que F(x) =x et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+2} = \frac{\pi}{4}$.

3) a) A l'aide d'une intégration par partie ,montrer que $\int_1^2 \mathrm{f(t)dt} = 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{t^2-t}{t^2-t+2}$.

b) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{t^2-t}{t^2-t+2} = \frac{t-1}{t^2-t+2} - \frac{1}{t^2-t+2}$.

c) Calculer alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites x = 1 et x = 2.

Exercice n°12 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $\mathrm{f(x)} = (1+\frac{1}{\mathrm{x}})\ln \mathrm{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur par $]0,+\infty[$: $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} + 1 - \ln \mathrm{x}$.

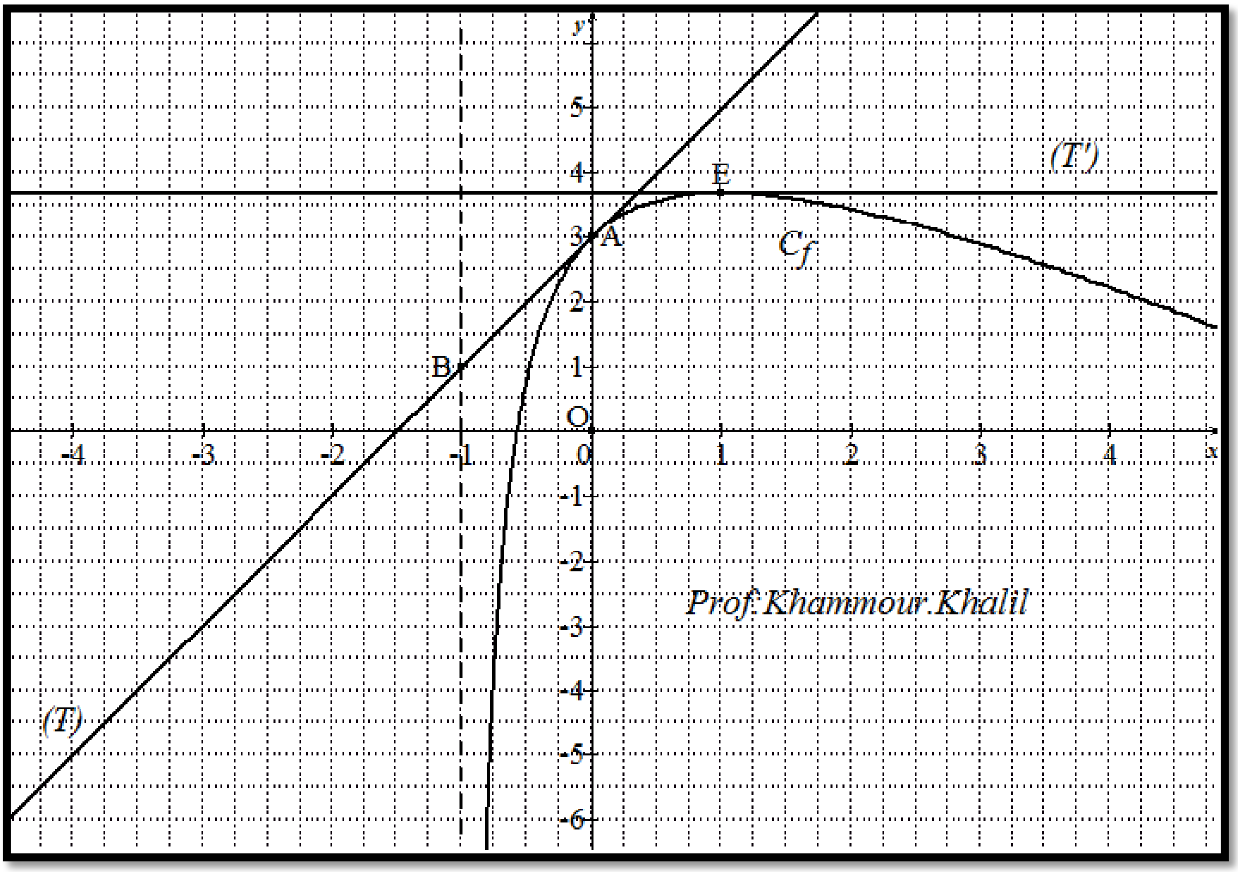
1) a) Calculer g'(x).
   b) Dresser le tableau de variation de g.
2) Déterminer le signe de g(x) sur $]0,+\infty[$.

Partie B

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) a) Calculer f '(x) pour tout $x \in]0,+\infty[$ et montrer que $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{g(x)}}{\mathrm{x}^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
   c) Calculer f (1). En déduire le signe de f (x) sur $]0,+\infty[$.
3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
   b) Tracer (C) et (T) .
4) Soit F la primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui prend la valeur -1 en 1 .
   a) Montrer que $\mathrm{F(x)} = \mathrm{x}\ln \mathrm{x} - \mathrm{x} + \frac{1}{2}(\ln \mathrm{x})^2$.
   b) Dresser le tableau de variation de F sur $]0,+\infty[$.

Exercice n°13 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous, la courbe (C_f) représente une fonction f définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. On a placé les points A(0 ; 3) , B(-1 ; 1) et E(1 ; 3+ln2). La droite (T) est tangente en A à la courbe (C_f) et la droite (T') est tangente en E ,à la courbe (C_f).

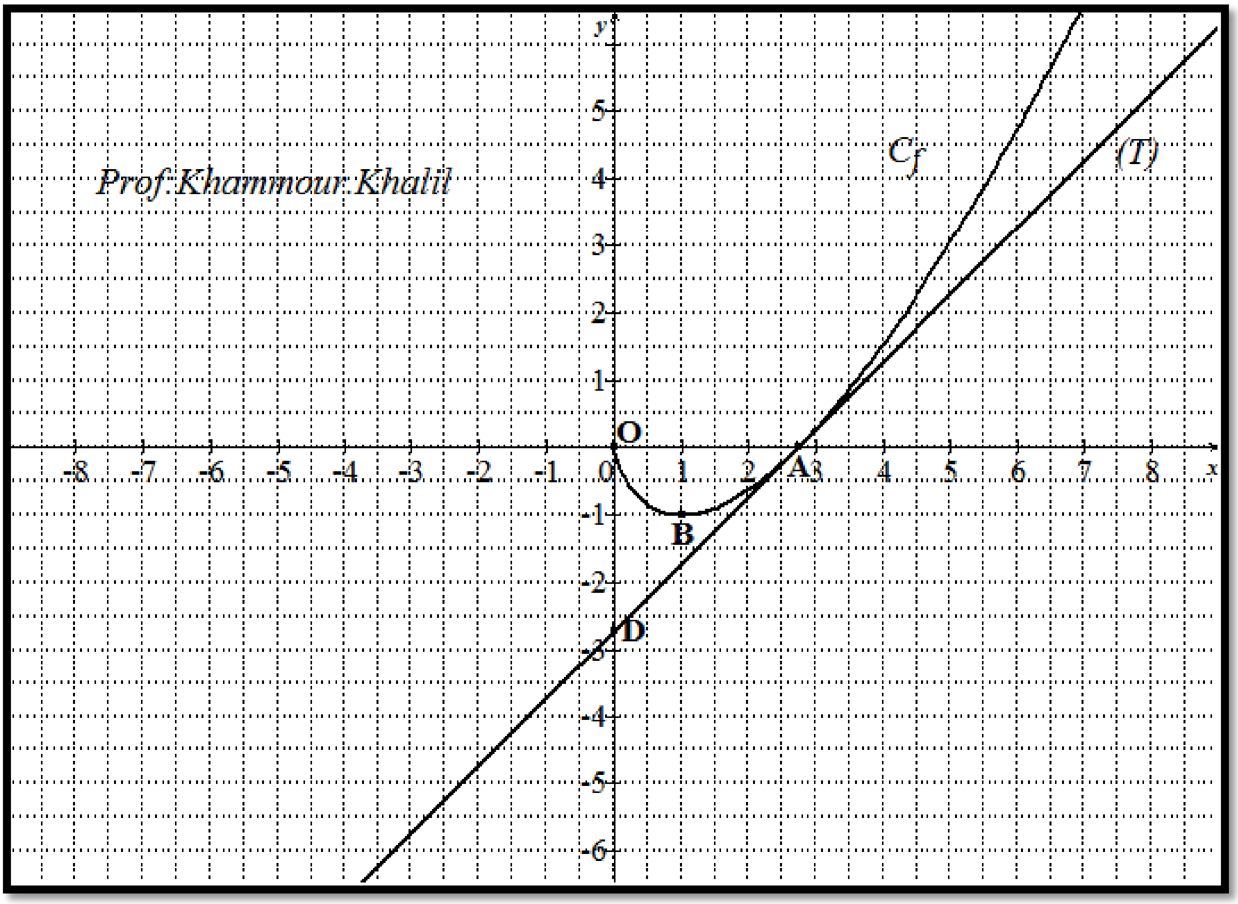


Par lecture graphique :

1) a) Déterminer l'équation de la tangente (T).
   b) Déterminer f (0) , f '(0) , f (1) , f '(1).
   c) Le nombre de solutions de l'équation f (x)=1.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) On admet que la fonction f est définie par : $f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$.
   a) Vérifier que $f(x) = -x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1)$.
   b) Soit la fonction g définie sur] -1,+∞[par : $g(x) = -x + (x+1)\ln(x+1)$.Calculer g '(x) pour tout x de] -1,+∞[.
   c) En déduire une primitive de f sur] -1,+∞[.

Exercice n°14 :

La courbe (C_f) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur]0 ; +∞[. On note f′ la fonction dérivée de f.
La courbe (C_f) passe par le points A(e,0) et B(1,-1).



Partie A

La courbe admet une tangente parallèle a l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et une tangente (T) au point d'abscisse e passe par le point D(0,-e).

1) Déterminer une équation de la droite (T).
2) Par lecture graphique déterminer :
   a) f (1) et f '(1).
   b) Dresser le tableau de variation de f sur]0 ; +∞[.
   a) Etudier le signe de f sur]0 ; +∞[.

Partie B

1) Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x(\ln(x) - 1)$.
   a) Déterminer la limite de f en +∞.
   b) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
2) a) Calculer f '(x) pour tout x de]0 ; +∞[.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c)Etudier le signe de f sur]0 ; +∞[.