

Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x^2)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln x$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2 + \ln x)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (\ln x)^2)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \ln x + 1}{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x)$

Exercice n°2 :

Soit g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + 2 \ln x$

- 1) a) Etudier les variations de g.
b) En déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$
- 2) Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + (2x - 1) \ln x$.
a) Etudier les variations de f.
b) Etudier la position relative de C_f par rapport à $\Delta: y = x$.

Exercice n°3 :

- 1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$.
a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de g .
c) Calculer g (0).En déduire le signe de g (x) sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.
- 2) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$ et soit (C_f) sa courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
a) Montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[$ $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f.
- 3) a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Δ .
c) Tracer la courbe (C_f) .
- 4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par : $h(x) = [\ln(x + 1)]^2$.
a) Calculer $h'(x)$.
b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.

Exercice n°4 :

- 1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
 - Calculer la dérivée f' de la fonction f .
 - En déduire les variations de la fonction f .
- 2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.
- Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
- (Indication $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$)
- Calculer la dérivée g' de la fonction g .
 - En déduire les variations de la fonction g .
- 3) a) Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
b) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g .
c) Tracer C_f et C_g .

Exercice n°5 :

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x$.

- Calculer $g'(x)$ et donner le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.
 - Dresser le tableau de variation de g .
- En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - x - 2 \frac{\ln x}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan ayant pour unités graphiques: 4 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

- Étudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
 - Étudier la limite de f en $+\infty$.
 - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et montrer que $f'(x) = -2 \frac{g(x)}{x^2}$.
 - Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
- a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à la courbe (C) .

- b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de (C) et de (D) .
- c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) .
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
- 4) Tracer avec soin (T), (D) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice n°6:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 + \frac{1}{x}) \ln x$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Soit g la fonction définie sur par $]0, +\infty[$: $g(x) = x + 1 - \ln x$.

- 1) a) Calculer $g'(x)$.
- b) Dresser le tableau de variation de g.
- 2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie B

- 1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- b) Dresser le tableau de variation de g.
- c) Calculer f (1). En déduire le signe de f (x) sur $]0, +\infty[$.
- 3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
- b) Tracer (C) et (T) .
- 4) Soit F la primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur -1 en 1 .
- a) Montrer que $F(x) = x \ln x - x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$.
- b) Dresser le tableau de variation de F sur $]0, +\infty[$.

Exercice n°7 :

La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

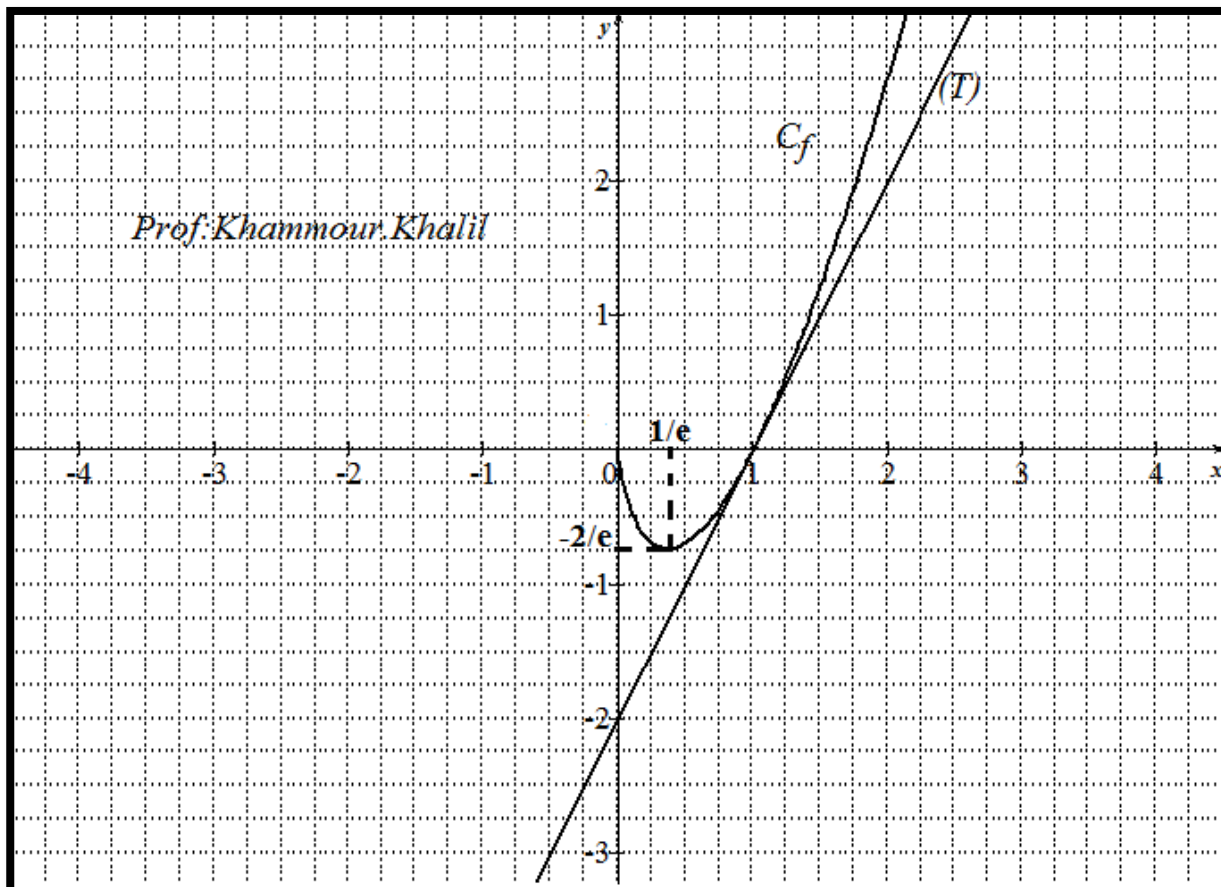
La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.

Par lecture graphique

- 1) Donner les valeurs de $f(\frac{1}{e})$ et $f'(1)$.
- 2) Etudier le signe de f sur $]0, +\infty[$.
- 3) On admet que la fonction f est définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (ax + b) \ln x$.
- a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.

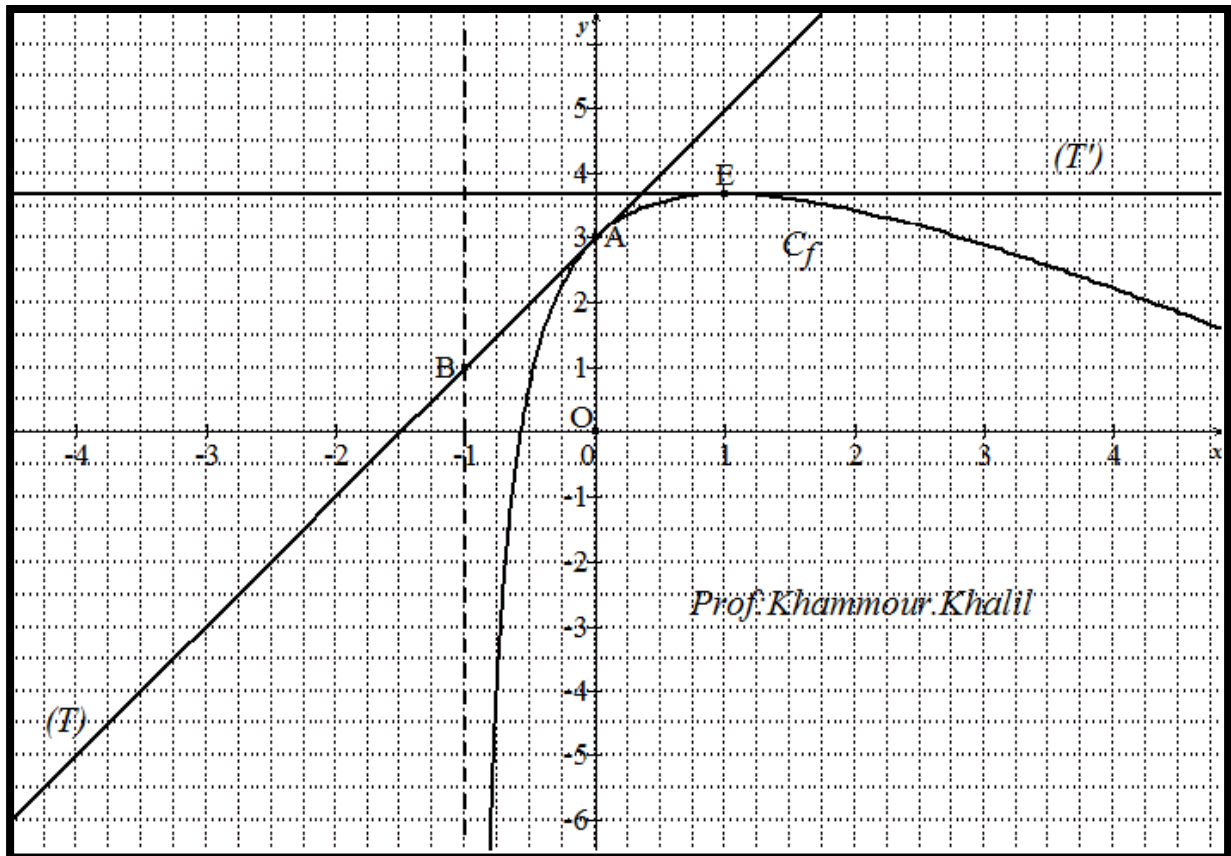
- b) Déterminer alors les valeurs de a et b .
- 4) On considère les fonctions F et G définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2})$ et $G(x) = x^2(1 - \ln x)$
- a) Calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.
- b) En déduire la primitive de f sur $]0, +\infty[$.

La courbe de la fonction f



Exercice n°8 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous, la courbe (C_f) représente une fonction f définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$. On a placé les points A(0 ; 3) , B(-1 ; 1) et E(1 ; $3+\ln 2$). La droite (T) est tangente en A à la courbe (C_f) et la droite (T') est tangente en E ,à la courbe (C_f).



Par lecture graphique :

- 1) a) Déterminer l'équation de la tangente (T).
 b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$, $f'(1)$.
 c) Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$.
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) On admet que la fonction f est définie par : $f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x + 1)$.
 a) Vérifier que $f(x) = -x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x + 1)$.
 b) Soit la fonction g définie sur $] -1, +\infty[$ par : $g(x) = -x + (x + 1) \ln(x + 1)$. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $] -1, +\infty[$.
 c) En déduire une primitive de f sur $] -1, +\infty[$.

Exercice n°9 :

On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = 2 \ln(x + 1) + 1$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 b) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $] -1, +\infty[$.
- 2) a) Dresser le tableau de variation de f sur $] -1, +\infty[$.

- b) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 3) On considère la droite (D) d'équation $y = 0,8x$. Construire (D).

Application économique :

Une entreprise fabrique des pièces pour avions. On note x le nombre de pièces fabriquées par mois avec $0 \leq x \leq 15$. Chaque mois, les coûts de production, exprimés en milliers d'euros, sont donnés par: $f(x) = 2 \ln(x + 1) + 1$.

Le prix de vente d'une pièce est 0,8 milliers d'euros.

- 1) Si l'entreprise vend x pièces, déterminer la recette exprimée en milliers d'euros.
- 2) Vérifier que le bénéfice mensuel est : $B(x) = 0,8x - 1 - 2 \ln(x + 1)$.
- 3) Calculer une valeur approchée de $B(3)$ et $B(14)$, puis préciser pour chacun de ces cas si l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice n°10 :

On considère la fonction f définie sur $] 1, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^3 - x^2)$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $] 1, +\infty[$.
- 3) b) Dresser le tableau de variation de f.
- 4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur $] 1, +\infty[$ une unique solution α .
Donner la valeur arrondie à 10^{-1} près de α .
- 5) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 6) Soit h la fonction définie sur $] 1, +\infty[$ par : $h(x) = 2x \ln x + (x - 1) \ln(x - 1)$.
a) Calculer $h'(x)$.
b) En déduire une primitive de la fonction f sur $] 1, +\infty[$.

Application économique :

On considère une machine produisant un liquide chimique, pour quelle soit rentable cette machine doit produire au moins 2 hectolitres.

De plus le liquide produit est dangereux et impose une fabrication maximale de 9 hectolitres avant révision de la machine.

Pour tout x de $[2,9]$, la valeur de cout marginal $C(x)$ est exprimé en milliers d'euros est donné par $C(x) = \ln(x^3 - x^2)$ et $C_T(x)$ est le cout totale de fabrication de x hectolitres de liquides. On rappelle que $C'_T(x) = C(x)$.

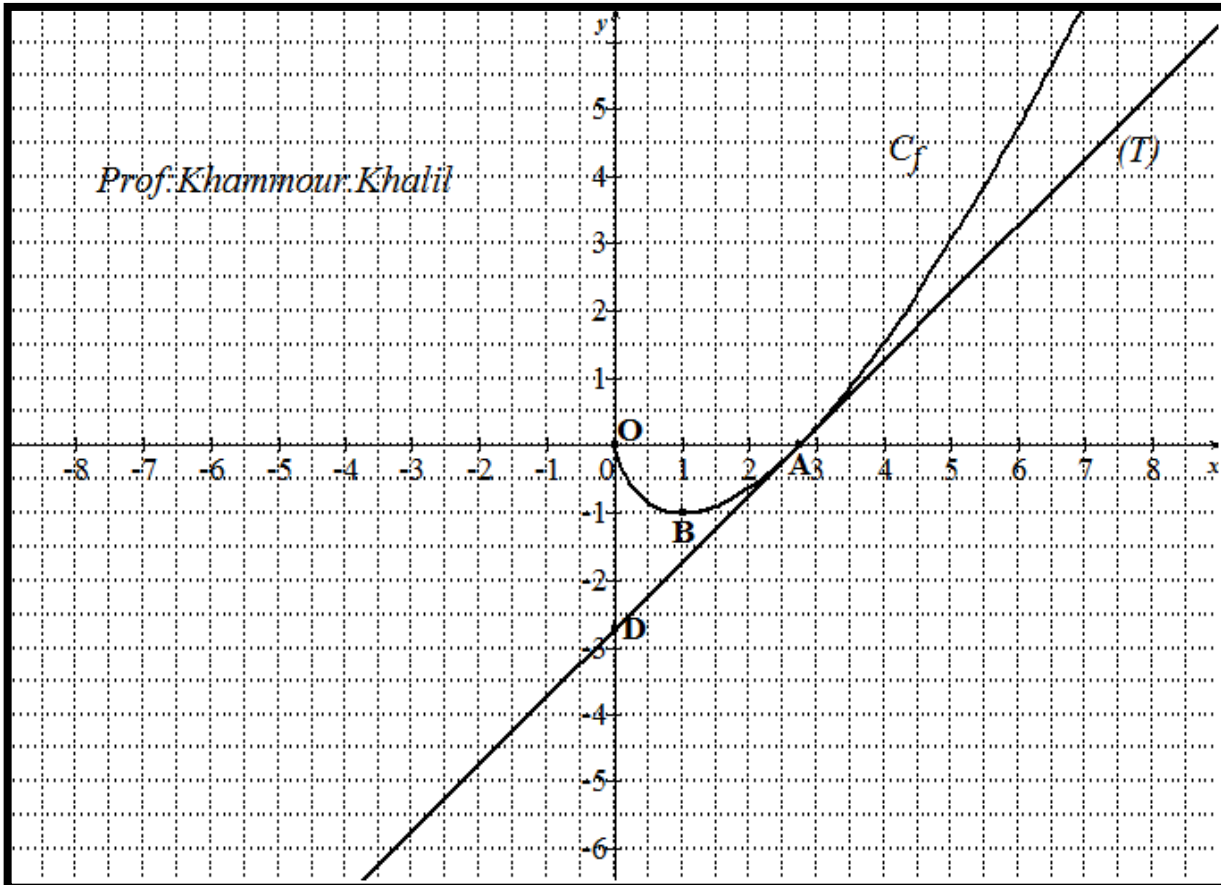
Le cout total de deux premiers hectolitres (mise en route de la machine et fabrication) est 10 milliers d'euros ce qui se traduit par $C_T(2) = 10$.

- 1) Déterminer le cout total $C_T(x)$ en fonction de x .
- 2) Calculer $C_T(9) - C_T(2)$. On donnera d'abord la valeur exacte de puis un valeur approchés à l'euros près. Donner une Interprétation graphiquement.

Exercice n°11 :

La courbe (C_f) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f .

La courbe (C_f) passe par les points $A(e,0)$ et $B(1,-1)$.



Partie A

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et une tangente (T) au point d'abscisse e passe par le point $D(0,-e)$.

- 1) Déterminer une équation de la droite (T).
- 2) Par lecture graphique déterminer :
 - a) $f(1)$ et $f'(1)$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - c) Etudier le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

- 1) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x(\ln(x) - 1)$.
 - a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- 2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
 - c) Etudier le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.