Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie par: $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; on note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR.

b) Montrer que pour tout x∈IR, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3}$

2) a) Dresser le tableau de variations de f.

b) En déduire le signe de f(x) pour tout x∈IR.

3) a) Vérifier que la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation y=x+1.

b) Etudier la position relative de C_f par rapport à T.

c) Démontrer que le point I(0,1) est un point d'inflexion de C_f .

4) Montrer que le point I est un centre de symétrie de C_f .

5) a) Montrer que C_f admet au voisinage de +∞ une asymptote horizontale D dont on donnera une équation et au voisinage de -∞ une asymptote horizontale qui est l'axe des abscisses.

b) Etudier la position de C_f par rapport à la droite D et à $(O, \vec{i})$

6) Tracer C_f , T et D dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.la courbe C' représentative de la fonction f^{-1} .

8) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

b) Montrer que pour tout x de]0,2[, $f\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right) = x$

c) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour x∈]0,2[.

d) Calculer $(f^{-1})'(x)$

Solution :

1) a) $x \to 1+x^2$ est dérivable, strictement positive sur IR

$\Rightarrow\ x \to \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur IR et non nulle

$\Rightarrow\ x \to \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur IR

$\Rightarrow$ f est dérivable sur IR .

b) $$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3}$$

2) a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3} > 0$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
f ‘(x)		+	
f(x)	0	$\nearrow$	2

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{+\infty}{+\infty} = FI$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = 2$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{-\infty}{+\infty} = FI$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = 0$$

b) D’après le tableau de variation f(x)>0 pour tout x ∈IR

3) a) $T: y = f'(0)(x-0) + f(0) = x + 1$

$T: y = x + 1$

b) **La position relative de C_f % T** :

$$f(x)-(x+1)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-x$$
$$=\frac{x(1-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$$
$$=\frac{-x^3}{(1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$

- <u>**1^er^ cas : Si x>0**</u> On a $f(x)-(x+1)<0$ alors C_f est au dessous de T .
- <u>**2^éme^ cas : Si x<0**</u> On a $f(x)-(x+1)>0$ alors C_f est au dessus de T.
- <u>**3^éme^ cas : Si x=0**</u> On a $f(x)-(x+1)=0$ alors T traverse C_f au point d'abscisse 0.

c) D'après la question qui précède on a T traverse C_f au point d'abscisse 0 donc I(0,1) est un point d'inflexion à C_f

4) On a $-x\in IR=D_f$

$$f(-x)+f(x)=1+\frac{(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}}+1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=2\times 1$$

Donc I(0,1) est un centre de symétrie à C_f

5) a) On a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow D: y=2$ est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow D': y=0$ est une asymptote a C_f au voisinage de $-\infty$ qui est l'axe des abscisse

b)

- <u>**Position relative de C_f % D**</u>

$$f(x)-2=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-2=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=$$
$$\frac{(x-\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}<0$$

$\Rightarrow C_f$ est au dessous de D pour tout $x\in IR$

- <u>**Position relative de C_f % D'**</u>

On a f(x)>0 pour tout $x\in IR$ donc C_f est au dessus de D'

6) (Voir courbe)

7) a) D'après le tableau de variation de f :f est continue et strictement croissante sur IR ,alors elle réalise une bijection de IR sur f(IR)=]0,2[=J

b) (Voir courbe)

8) a) f dérivable sur IR et f' est non nulle alors f^{-1} dérivable sur J

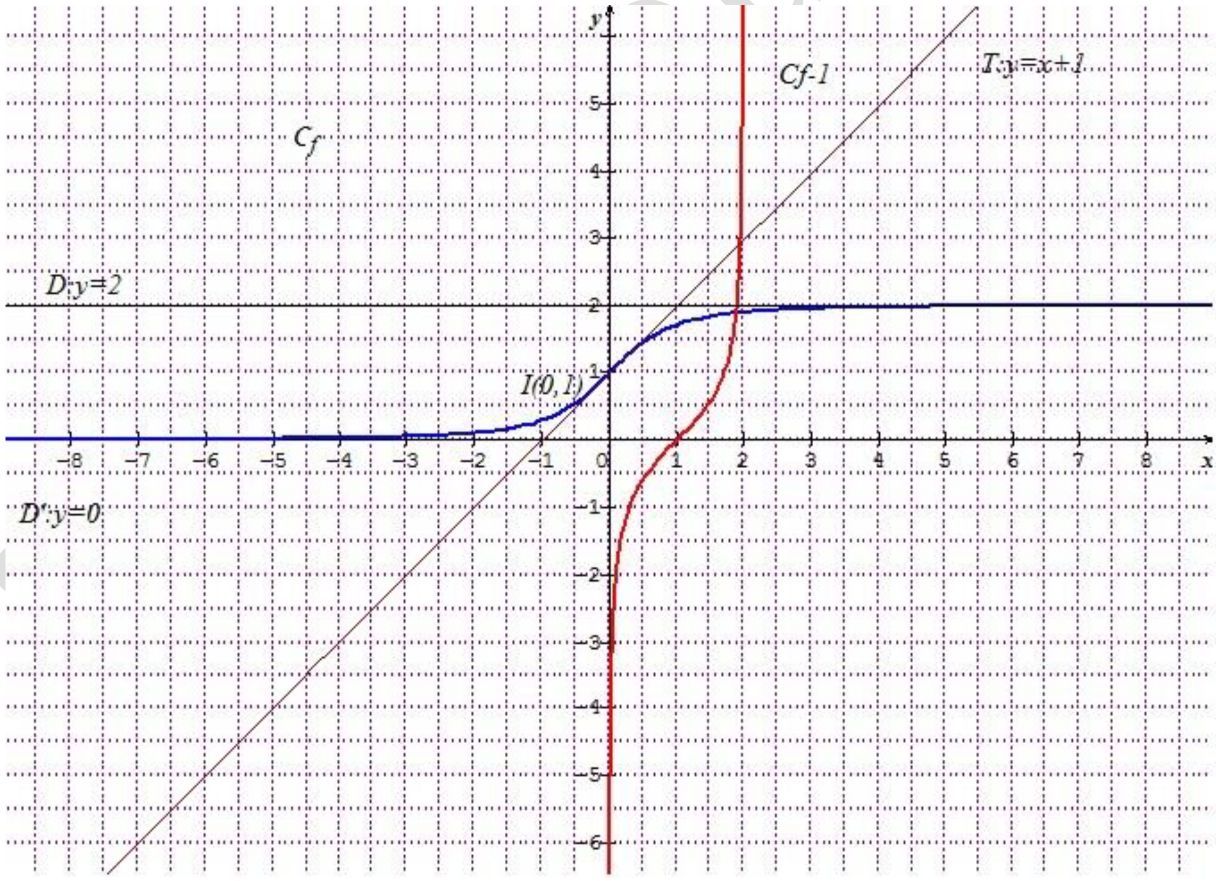
b)x∈]0,2[,$f\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right) = 1 + \frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}} = 1 + \frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}} =$

$= 1 + x - 1 = x$

c) On a $f\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right) = x$ donc $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$ x∈]0,2[

d) $(f^{-1})'(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}-(x-1)\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{2x-x^2}^2} = \frac{\sqrt{2x-x^2}-(x-1)\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{2x-x^2}^2} =$

$\frac{\sqrt{2x-x^2}+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{2x-x^2}^2} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}^3}$



Mr:Khammour.Khalil Tél:27509639