LYCEE THELEPTE ✠✠✠ **DEVOIR DE SYNTHESE N°2** ✠✠✠ Enseignant : H.Salem	4 ème Math Epreuve : Mathématiques Durée : 2h — A .S : 2010 - 2011

Exercice 1: (3 pts)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse exacte
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse 0 point.

1) Dans la figure ci-contre, (C) est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   f(x) = a^x alors a est égale à :

   a) 0,2

   b) 1,2

   C) 2

2) L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. L'image du plan Q : $x + y - z + 2 = 0$ par la translation du vecteur $\vec{k}$ a pour équation :

   a) $x + y - z + 1 = 0$; b) $x + y - z + 3 = 0$; c) $x + y - z = 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{lnx}{x^{0,0001}}$ est égale à :

   a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 0

Exercice 2: (3 pts)

On étudie la croissance d'une culture dans un milieu liquide non renouvelé en mesurant la quantité N de liquide absorbé en millilitre à divers instant X, l'unité étant l'heure, on obtient le tableau suivant où Y = ln N désigne le logarithme népérien de N.

X	0	0,5	1	1,5	2
Y = ln N	9,1	9,25	9 ,30	9,40	9,60

1) Représenter le nuage de points de cette série.

2) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y et vérifier qu'il ya une forte corrélation linéaire entre ces deux variables.
3) a) Donner une équation de la droite D de régression de Y en X.

b) Donner une estimation de la quantité de liquide N absorbée au bout de cinq heures.

Exercice 3: (4 pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$.

1) a) Montrer que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [1, e]$ on a :

$$\frac{(\ln x)^n}{xe} \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{(\ln x)^n}{x}$$

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) a) montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $on\ a$:

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

b) montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 4: (5 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points A(3,1,0), B(1,2,0), C(3,2,1) et D$(0,0,m)$ où m est un réel positif.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire l'aire du triangle ABC.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C.

Vérifier que D $\notin$ P.

2) Déterminer en fonction de m le volume du tétraèdre ABCD.

3) Soit S_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$.

Montrer que pour tout $m \in IR_+$, S_m est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

4) a) Montrer que S_m est tangente à P si et seulement $m = 2$. Montrer dans ce cas que la droite (DB) est perpendiculaire au plan P.

b) En déduire le point de contact de S_2 et P.

Exercice 3: (5 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$

1) a) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$.

c) Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$.

2) On a tracer la courbe représentative (C) de f et la droite $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.Tracer soigneusement la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.

3) a) Vérifier que pour tout $x \in$ IR, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

b) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites $= 0$, $x = \alpha$ et $y = \alpha$.

Montrer que $\mathcal{A} = \alpha^2 - \ln(\frac{1+e^\alpha}{2}) - \frac{1}{1+e^\alpha} + \frac{1}{2}$.En déduire $\int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) dx$.

c) Déterminer en fonction de α l'aire B de la partie du plan limitée par les courbes (C), (C') et les deux axes du repère.