

NB : Il sera tenu compte de la rédaction et la rigueur de raisonnement : ☺

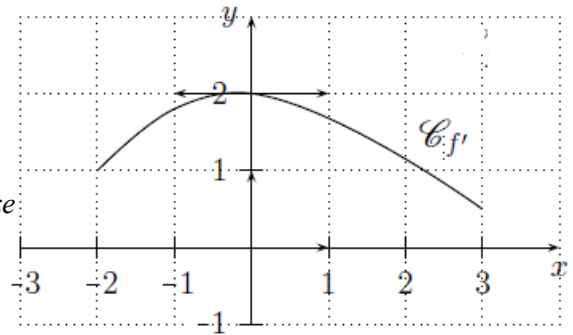
### Exercice 1 :

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivables sur  $[-2;3]$

La courbe ci-contre est celle de  $f'$  (fonction dérivée de  $f$ )

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant la réponse

- 1./  $f(-1) < f(2)$
- 2./ La courbe ( $C_{f'}$ ) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses
- 3./  $|f(3) - f(-2)| \leq 10$
- 4./  $f$  réalise une bijection de  $[-2,3]$  sur  $f([-2,3])$



### Exercice 2 :

On considère la suite  $U$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \cos(U_n) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1. / Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x + \cos(x)$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. / a. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$

b. Etudier la monotonie de  $(U_n)$ .

c. En déduire que  $(U_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

3. / a. Montrer que 
$$\sum_{k=0}^n \cos(U_k) = U_{n+1}$$

b. Calcule 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \cos(U_k)$$

4. /  $x$  un réel donné,

Développer  $(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^2$  puis déduire que 
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos(x)+1}{2}$$

5. / Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose 
$$V_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{U_k}{2}\right)$$

a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$$

b. Calculer alors 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n.$$

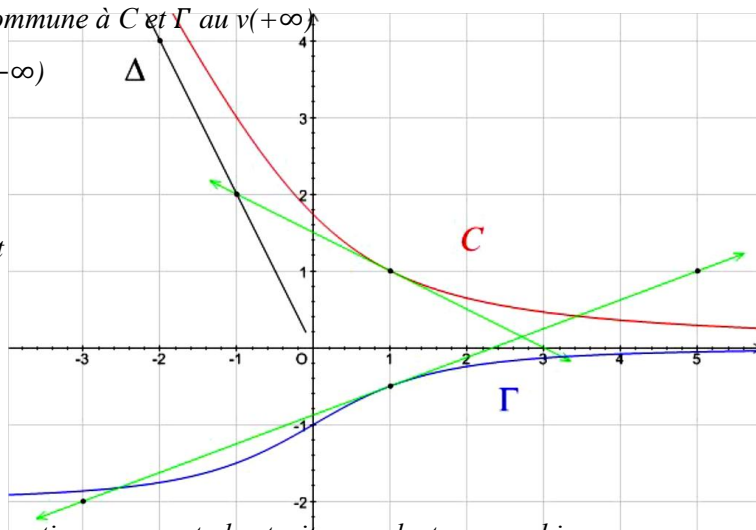
### Exercice 3 :

Dans la figure ci-contre :

- $C$  est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction  $f$ ,
- $\Gamma$  est la courbe de sa fonction dérivée.
- L'axe des abscisses est une asymptote commune à  $C$  et  $\Gamma$  au  $v(+\infty)$
- La droite  $\Delta$  est une asymptote à  $C$  au  $v(-\infty)$

**A.)** Par lecture graphique, déterminer :

- 1./  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$
- 2./  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f \circ f(x)}{f(x)}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x + 1)$
- 3./  $f(1)$ ,  $f'(1)$  et  $f''(1)$



**B.)** On donne  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - x$

**N.B :** Dans la suite de l'exercice toutes les questions ne seront plus traitées par lecture graphique.

1. / a. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$
- b. Calculer  $f''(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et en déduire que  $f'$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- c. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout  $x \in [\frac{1}{2}, 2]$  on a :

$$|f(x) - 1| \leq \frac{3}{4}|x - 1|$$

2. / Soit la fonction  $g$  continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$  tel que :  $g(0) = 1$  et  $g(1) = \sqrt{3}$

- a. Montrer qu'il existe au moins un réel  $a \in ]0, 1[$  tel que  $f(a) = g(a)$
- b. Montrer qu'il existe au moins un réel  $b \in ]0, 1[$  tel que  $f'(b) = -g'(b)$

3. / On pose  $u(x) = x \cdot \sin(\frac{2}{x})$  et  $v(x) = -\frac{1}{x^2} + \cos(\frac{1}{x})$

- a. A l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en 0 des fonctions  $u$  et  $v$ .
- b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u \circ f)(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ v)(x)$ .

### Exercice 4 :

Dans le plan complexe  $P$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points  $A(2i)$  et  $B(i)$

Soit l'application  $f : P \rightarrow P$ , tel que  $z' = \frac{iz+2}{z-i}$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

1. / Déterminer les points invariants par l'application  $f$  et exprimer leurs affixes sous forme algébrique et trigonométrique
2. / a. Montrer que pour tout  $z \neq i$  et  $z \neq 2i$ ,  $|z'| = \frac{AM}{BM}$  et  $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) [2\pi]$
- b. Déterminer et construire l'ensemble  $(E)$  des points  $M(z)$  tel que  $|z'| = 1$
- c. Déterminer et construire l'ensemble  $(F)$  des points  $M(z)$  lorsque  $M'$  décrit la droite  $(O, \vec{v}) \setminus \{O\}$
3. / a. Calculer  $(z'-i)(z-i)$  pour  $z \neq i$
- b. En déduire l'image, par  $f$ , du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $B$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

Avec mes encouragements