DEVOIR DE MAISON N°3

EX1 :

Soit la suite réelle U_n définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{3}{U_n} \end{cases}$ pour tout n de IN

1) Montrer que $U_n \geq 2$ pour tout n de IN
2) Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur IR^*+ par $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$
3) Soit $V_n = U_{2n}$ pour tout n de IN
   a) Montrer par récurrence que la suite (V) est majorée par 3
   b) Montrer par récurrence que la suite (V) est croissante
4) a) Montrer que pour tout n de IN : $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2}|U_n - 3|$

   b) Déduire que pour tout n de IN : $|U_n - 3| \leq (\frac{1}{2})^n$

   c) en déduire la limite de la suite (U) puis celle de (V)

5) Soit la suite (S_n) définie par : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$ pour tout n de IN^*

   Montrer que S_n converge vers 3

6) Soit la suite (q_n) définie par : $q_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

   a) montrer que q_n est une suite géométrique dont on précisera la raison

   b) Exprimer U_n en fonction de n puis retrouver sa limite

EX2 :

1) on considère l'équation E : 8x + 5y = 1 ou (x ;y) est un couple de nombres relatifs.
   a) Donner une solution particulière de l'équation E
   b) Résoudre l'équation E
2) Soit N un nombre entier naturel tel qu'il existe un couple (a ;b) de nombres entiers vérifiant $\begin{cases} N = 8\,a + 1 \\ N = 5\,b + 2 \end{cases}$
   a) Montrer que (a ;-b) est solution de E
   b) Quel est le reste de la division de N par 40 ?
3) a) Résoudre l'équation € : 8x + 5y = 100

HICHEM_FARHATI@YAHOO.FR

b) Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 13 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'homme et de femmes dans le groupe.

EX3 :

On considère la suite (U_n) définie par :

Pour tout x de IN et n≥2 , $U_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$

1) soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$
   a) donner le domaine de définition de f
   b) calculer la limite aux bornes
   c) montrer que f est strictement décroissante sur]1 ; +∞ [
2) a) montrer que pour tout entier k ≥ 2 on a :

$$\frac{1}{k \ln k} \geq \int_k^{k+1} f(x)dx$$

   b) en déduire que pour tout n ≥ 2 , $U_n \geq \int_2^{n+1} f(x)dx$

3) a) calculer $I_n = \int_2^{n+1} f(x)dx$, pour n≥2

   b) déterminer la limite de I_n en +∞

   c) en déduire la limite de U_n.

HICHEM_FARHATI@YAHOO.FR

BON TRAVAIL