

Date : 11 / 02 / 2012

Prof : Meddeb Tarak

Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (4 pts)

1) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

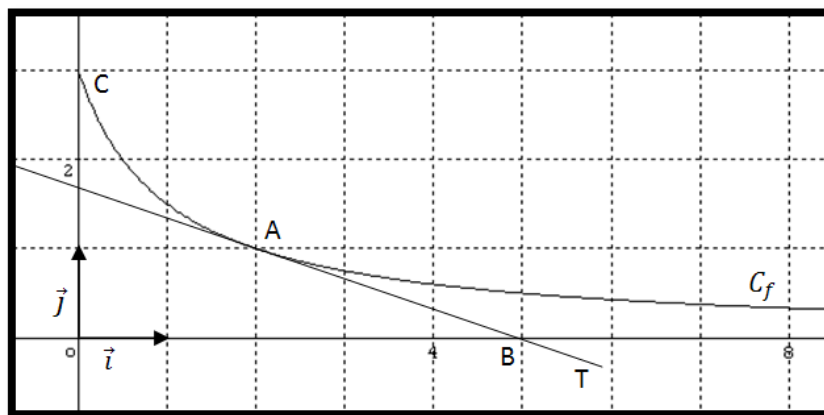
a/ Calculer le déterminant de M , en déduire que M est inversible.

b/ Montrer que $M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système : $\begin{cases} y + 2z = 5 \\ -x + 3y = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$.

Exercice n°2 : (7 pts)

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative C_f d'une fonction f dérivable sur $[0, +\infty[$. On désigne par f' la fonction dérivée de f .



On sait que :

- L'axe des abscisses est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
- La courbe C_f passe par les points $A(2 ; 1)$ et $C(0 ; 3)$.
- La tangente T à C_f au point A passe par $B(5 ; 0)$.

1) A partir du graphique et des renseignements fournis :

a/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f'(2)$.

b/ Ecrire une équation de T .

2) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- a/ Calculer : $g(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- b/ Etudier les variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$
- 3) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
- a/ Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- b/ Calculer $h'\left(\frac{1}{2}\right)$.
- 4) a/ Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b/ On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f .
Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
- c/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur J . Calculer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice n°3 : (4 pts)

- 1) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 + 3x + 4$.
- a/ Etudier les variations de g .
- b/ Calculer $g(-1)$, en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$.
- a/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 1)^2}$.
- b/ Dresser le tableau de variation de f .

Exercice n°4 : (5 pts)

- 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que les nombres 87 et 31 sont premiers entre eux.
- 2) On considère l'équation $(E) : 87x + 31y = 2$, où x et y sont deux entiers relatifs.
- a/ Dire pourquoi cette équation admet des solutions.
- b/ Vérifier que le couple $(x_0; y_0) = (10; -28)$ est solution de (E) .
- 3) Soit l'équation $(E') : 87x + 31y = 0$, où x et y sont deux entiers relatifs.
- a/ Démontrer l'équivalence :
 $(x; y)$ est solution de (E) si, et seulement si $(x - x_0; y - y_0)$ est solution de (E') .
- b/ Résoudre l'équation (E') .
- c/ En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Bonne chance