Lycée secondaire : 18 / 01 / 52 Djebeniana : Décembre 2010	DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1 (MATHÉMATIQUES)	Profs : AGUECH. N & ABID.H Classes:4ème année Sc info 1& 2 Durée : 2 heures

EXERCICE N°1 : (3 points)

1) a - Effectuer la division euclidienne de 320 par 15
   b - En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de (–320) par 15
2) a - Vérifier les congruences : $4^5 \equiv 1[11]$ et $9^5 \equiv 1[11]$.
   b - En déduire que $4^{104} - 9^{103}$ est divisible par 11
3) Montrer que pour tout entier naturel, : $3\times19^{6n+1} - 2\times16^{3n+2} \equiv 0[7]$.

EXERCICE N°2 : (6 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{U_n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $1 \le U_n \le 2$.
   b – Montrer que la suite (U_n) est croissante.
   c – En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .
2) a – Vérifier que : $2 - U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n+1}(2 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b – En déduire que : $2 - U_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(2 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c – Montrer par récurrence que : $2 - U_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (2 - U_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   d – Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE N°3 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{2 + x^2}$

1) Montrer que f est dérivable sur et que $f'(x) = \dfrac{-8x}{(2 + x^2)^2}$
2) Démontrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3) Soit f^{-1} la réciproque de f .
   Etudier la continuité et le sens de variation de f^{-1}.
4) Dans l'annexe ci – jointe **(page 3)**, (C) est la courbe représentative de dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C ') de f^{-1}.

5) On considère l'équation f(x) = x.
   a - Monter que l'équation f(x) = x est équivalent à l'équation : $-x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$
   b - Déduire que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$.
   c - Vérifier que $\alpha \in]0; 1[$.
6) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE N°4 : **(5 points)**

1) a - Vérifier que : $(3 + i)^2 = 8 + 6i$.

b - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$ on donnant les solutions sous forme algébrique

2) Pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $f(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 6i)z + 3 - 4i$.

a - Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera

b - Déterminer trois réels a , b et c tels que , pour tout z de $\mathbb{C}$ on a : $f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$

c - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$, on désigne par A ,B et C les points d'affixes respectives i , 2 – i et 1 + 2 i

b - Déterminer la nature du triangle ABC.

c - Déterminer l'affixe du point D pour que ABDC soit un rectangle..

Feuille à rendre avec la copie

Non et prénom :…………………………. Classe :……………………..

Annexe pour l'exercice 2