Exercice N 1

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2+3x}{1+x-x^2};\lim_{x\to1}\frac{2-x+x^2}{1+x-2x^2};\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1};\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-2x);\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x);\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-3x+1);\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3};\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2};\lim_{x\to0}x(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x});\ \lim_{x\to+\infty}\cos(\frac{2\pi x-1}{3x-2});\lim_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x};\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$$

Exercice N 2

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f :

1/ $f : x \mapsto \cos(\frac{\pi x+1}{x})$ en $-\infty$

2/ $f : x \mapsto \sin(\frac{3}{\sqrt{x}})$ en $+\infty$

3/ $f : x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ en 0^+

4/ $f : x \mapsto \frac{\cos(x^2-1)-1}{x^4-2x^2+1}$ en 1

Exercice N 3

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ *par* $f(x)=(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})\sin x$.

1) *Montrer que, pour tout réel positif x,* $f(x)=\frac{2\sin x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2) *Montrer que, pour tout réel positif x,* $|f(x)|\le\frac{2}{\sqrt{x}}$.

3) *En déduire la limite de f en +∞.*

Exercice N 4

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{2-\cos x}$.

1) *Montrer que, pour tout réel x,* $\frac{1}{3}\le f(x)\le1$.

2) *En déduire les limites suivantes :* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(2-\cos x)};\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{2-\cos x};\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2(2-\cos x)}$

Exercice N 5

Soit la fonction $f : x\mapsto 3x+2\sin x$.

1) a) *Montrer que, pour tout réel x,* $3x-2\le f(x)\le 3x+2$.

b) *En déduire :* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) *Soit la fonction g définie sur IR par :* $\begin{cases}\frac{x}{f(x)} & si\ x\neq0\\ \frac{1}{5} & si\ x=0\end{cases}$

a) *Montrer que g est continue sue IR.*

b) *Montrer que, pour* $x \in \left]\frac{2}{3},+\infty\right[: \frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$.

c) *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. *Interprète géométriquement le résultat.*

Exercice N 6

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ a & si \;\; x \neq 0 \end{cases}$ *(avec a un réel)*

1) *Déterminer le domaine de définition de f.*
2) *Pour quelles valeurs de a, f est continue en 0.*
3) *Préciser, suivant a, le domaine de continuité de f.*
4) *Calculer :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (xf(x)+1-x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,f(x)$.

Exercice N 7

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}}$.

1) *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2) *Montrer que f est prolongeable par continuité en -3 et déterminer son prolongement.*

Exercice N 8

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$.

1) *Déterminer* D_f.
2) *Montrer que, pour tout réel de* D_f, $f(x) = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$.
3) *Montrer que la droite D d'équation* $y = x - \frac{1}{2}$ *est une asymptote à la courbe de f en* $+\infty$.
4) *Etudier la position de la courbe de f par rapport à la droite D.*
5) *Etudier la nature de la branche infinie de la courbe de f en* $-\infty$.

Exercice N 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{x-1}$.

1) *Montrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles* $[0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.
2) *Déterminer* $f([0,1[)$ *et* $f(]1,+\infty[)$.
3) *Montrer que l'équation :* $(x-1)\sqrt{x} = 1$ *admet dans* $\left[\frac{3}{2},2\right]$ *une unique solution* α.
4) *Déterminer une valeur approchée de* α *à* 10^{-1} *prés.*