EXERCICE 1

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2|x|}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{|x-1|-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin^2 x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2(3x)}{4x^2}$

9) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+2|x|}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x|+1}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

EXERCICE 2

La figure1 si contre désigne la courbe représentative d'une fonction f Ainsi que ces asymptotes

On utilisant la figure déterminer :

1- a-le domaine de définition de f
   b- les images de -3,0 et 2 par f
2- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
3- La fonction f admet elle une limite en $-\infty$
4- Etudier la continuité de f sur son domaine De définition

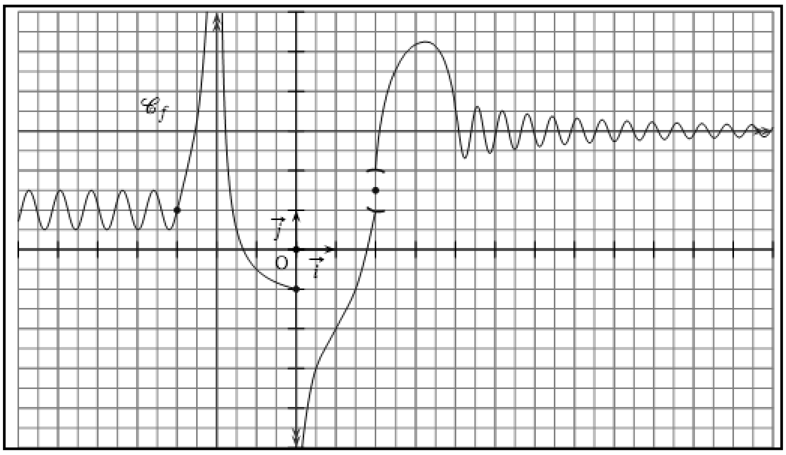

figure 1

EXERCICE 3

La figure 2 si contre désigne la courbe représentative d'une fonction f Ainsi que ces asymptotes

On utilisant la figure déterminer :

1- le domaine de définition de f
2- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-x$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

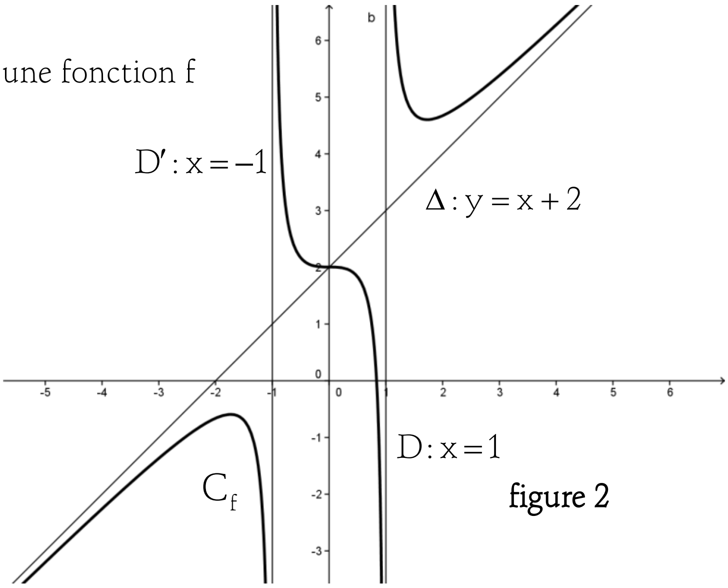

figure 2

EXERCICE 4

Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :

1- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & \text{si } x\neq 0\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}$

2- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{\sin x}, & \text{si } x\neq 0\\ 1, & \text{si } x=0\end{cases}$

3- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}, & \text{si } x\succ 1\\ \dfrac{2\sin(x-1)}{x-1}, & \text{si } x\prec 1\\ 2, & \text{si } x=1\end{cases}$

EXERCICE 5

Dire dans chacun des cas suivantes si la fonction f est prolongeable par continuité ou non au point considéré. Si oui déterminer ce prolongement

$1\bullet f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2};x=2$ $\qquad 3\bullet f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1};x=1$ $\qquad 5\bullet f(x)=\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x};x=\dfrac{\pi}{4}$

$2\bullet f(x)=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+3}};x=-3$ $\qquad 4\bullet f(x)=\dfrac{1}{x}\left(\cos x-\dfrac{1}{\cos x}\right);x=0$ $\qquad 6\bullet f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right);x=0$

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\sin(\cos x)}$

1- Déterminer le domaine de définition de f
2- Etudier la continuité de f sur son domaine de définition
3- Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;k\in Z\right\}$

EXERCICE 7

La partie entière d'un réel x notée E(x) est le plus grand entier relatif Qui lui est inferieur ou égal

Par exemple E(2,4)=2 ; E(3)=3 ; E(-2 ,7)=-3 ; $E(\pi)=3$

La fonction partie entière est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a x

Associe E(x) dont la représentation graphique est si contre (figure 3)

1- Déterminer E(x) pour $x\in[1,2[$
2- Déterminer E(x) pour $x\in[-2,-1[$
3- Déterminer le domaine de continuité de la fonction E(x)
4- Déterminer l'image de l'intervalle $[-2,2]$ par la fonction E(x)
5- Montrer que $x-1\leq E(x)\leq x$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x}$
6- Soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par :
$f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$
a- Tracer la représentation graphique de la fonction f
b- La fonction f est elle continue sur $[-2,2]$? justifier ta réponse

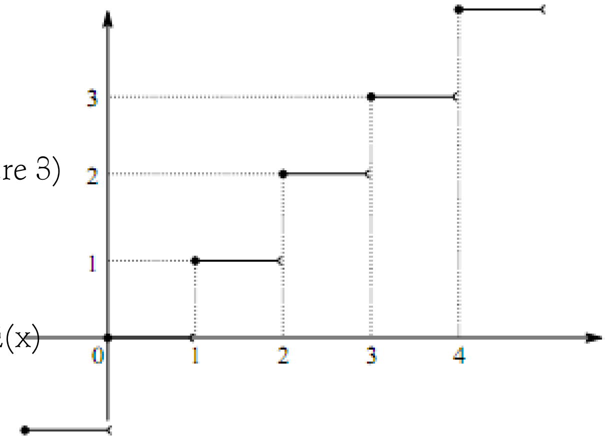

figure 3

EXERCICE 8

On utilisant le tableau de variations si dessous d'une fonction f ; répondre au questions suivantes

1- Déterminer le domaine de définition de f

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2- Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{f(x)+3}$

3- Déterminer les images des intervalles suivantes par f

$]-\infty,-1]$; $]-1,0[$; $]-\infty,0[$; $]0,+\infty[$

EXERCICE 9

Soit $f(x)=\dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$

1- Démontrer que , si $x \succ 0$ alors $\dfrac{-1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

2- En déduire que f admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos x}$

1- Montrer que , pour tout réel x , on a : $\dfrac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

2- En déduire les limites suivantes :

a- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2-\cos x}$ b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+\cos x}{2-\cos x}$

EXERCICE 11

En utilisant les théorèmes de comparaisons sur les limites de fonctions, calculer les limites des Fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$

$$f(x)=\cos x-3x \quad , \quad g(x)=\frac{\sin x}{x} \quad , \quad k(x)=\frac{x}{2\sin x+3x}$$

EXERCICE 12

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dans dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

1- Déterminer le nombre de solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-2$

2- Déterminer le nombre de solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-4$

3- Déterminer le nombre de solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=2$

EXERCICE 13

1- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+3}$

Déterminer les images par f des intervalles suivants : $[-4;4]$; $[-1;3]$; $[0;4]$; $[0;+\infty[$

2- Soit g la fonction définie sur $[-5;+\infty[$ par $g(x)=x-3\sqrt{x+5}$

3- Déterminer les images par g des intervalles suivants : $[-4;3]$; $]-1;3]$; $]0;1[$; $[-5;+\infty[$

EXERCICE 14

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f : x \to \begin{cases} x^2+1 ; \text{si } x \prec 0 \\ x+2 ; \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1- Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

2- Déterminer les images par f des intervalles suivants $[-2;-1]$; $[-1;-1]$; $[0;+\infty[$

EXERCICE 15

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$; $g(x)=\begin{cases} x-1 ; \text{si } x \prec 0 \\ x^2 ; \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Déterminer fog et gof . sur quels ensembles ces fonctions sont-elles continues ?

EXERCICE 16

Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I indiqué

- $x^3 - 5x^2 + x - 1 = 0$ $\quad I = [4,5]$
- $x^7 - x^2 + 1 = 0$ $\quad I = [-2,0]$
- $\cos x = x$ $\quad I = [0,1]$
- $\tan x = \frac{3}{2}x$ $\quad I = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$
- $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ $\quad I = \mathbb{R}$

EXERCICE 17

1- Montrer que les équations suivantes ont une **unique solution** α dans l'intervalle I indiqué

- $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ $\quad I = [2,3]$
- $x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$ $\quad I = [-1,0]$
- $2x\sqrt{x+2} + 1 = 0$ $\quad I = [-1,0]$
- $x + \frac{4}{x^2} = \frac{9}{2}$ $\quad I = [1;4]$
- $x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 2$ $\quad I = [0;4]$

2- Donner une valeur approché de α dans chaque cas a 10^{-1} prés

EXERCICE 18

On considère l'équation (E) : $x^4 - 6x^2 + x = -1$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 + x$

1- Déterminer la fonction dérivée f' de f et la déviée seconde f'' de f'

2- **a**-déterminer le nombre de solutions de l'équation $4x^3 - 12x + 1 = 0$
b-donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chaque solution

3- déduire le signe de f' puis donner le tableau de variation de f

4- déduire le nombre de solutions de l'équation (E)

EXERCICE 19

Montrer que l'équation $x^n - 5x + 3 = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ admet une solution réelle

EXERCICE 20

On considère l'équation $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

1- Montrer qu'elle admet 3 racines réelles distinctes vérifiant $-2 \prec x_1 \prec -1 \prec 0 \prec x_2 \prec 1 \prec x_3 \prec 2$

2- Justifier la relation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, puis en déduire les inégalités : $|x_2| \prec |x_1| \prec |x_3| \prec 2$

EXERCICE 21: les deux questions sont indépendantes

1- Soit λ un réel strictement positif
Déterminer suivant les valeurs du λ le nombre des solutions dans l'intervalle $[0;2\lambda]$ de l'équation

$$x^3 - 3\lambda^2 x + 2 = 0$$

2- Déterminer selon les valeurs du réel λ,le nombre des solutions dans l'intervalle $[0;1]$ de l'équation

$$x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$$

EXERCICE 22

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal a 2 , soit la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$$

1- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle $[0;1]$

2- Démontrer que , Pour tout entier naturel n supérieur ou égal a 2 , $a_n \leqslant \frac{1}{n}$

3- En déduire que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite

EXERCICE 23

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction **continue** telle que $f(a)=f(b)$.

1- Montrer que la fonction $g(t)=f(t+\frac{b-a}{2})-f(t)$ s'annule au moins en un point de $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$

2- **Application** : une personne parcourt 4 km en 1heure . montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km .

EXERCICE24

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction **continue**

1- Montrer que f a un point fixe (i.e . il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=c$)

2- Montrer qu'il existe c dans $[0,1]$ tel que $f(c)=\sqrt{c}$

3- On suppose que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Montrer qu'il existe c dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c+\frac{1}{2})-f(c)=\frac{1}{2}$

EXERCICE 25

1- Soit $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0)=f(2)$

Montrer qu'il existe c dans $[0,1]$ tel que $f(c)=f(c+1)$

2- Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0)=f(1)$

Montrer qu'il existe c dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c+\frac{1}{2})=f(c)$

EXERCICE 26

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0)\neq f(1)$. p et q deux réels strictement positifs

Montrer qu'il existe c dans $]0,1[$ tel que $pf(0)+qf(1)=(p+q)f(c)$

EXERCICE 27

Soit f et g : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonction **continues** telles que $f(a)=g(b)$ et $f(b)=g(a)$

Soit p et q deux réels strictement positifs

Montrer qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c)=g(c)$

EXERCICE 28

Soit f une fonction **continue** sur $\mathbb{R}$ telle que fof possède un point fixe a

Montrer que f possède un point fixe sur $\mathbb{R}$

Indication : *en posant* $g(x)=f(x)-x$, *comparer g(a) et g(f(a))*

EXERCICE29

Soit f et g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions , avec f **bornée** et g **continue** .

Montrer que fog et gof sont bornées .

EXERCICE 30

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f([a,b])\subset[a,b]$

1- Montrer que f admet au moins un point fixe (i.e . il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$)

Indication : *on utilisera la fonction g(x)=f(x)-x*

2- Soit f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction **continue et bornée** . montrer qu'elle a un point fixe

3- Soit f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction **continue et périodique** .

a- Montrer que f est bornée

b- En déduire que admet au moins un point fixe

VRAI-FAUX

Rependre par vrai ou faux en justifiant ta réponse dans chaque cas

PROPOSITION	V	F
✱Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$		
✱Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$		
✱Si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$		
✱Si pour tout $x\in D_f$; $\dfrac{1}{x}\le f(x)\le 2+\dfrac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ avec $0\leqslant \ell\leqslant 2$ et ℓ réel		
✱Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$		
✱Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lambda$; alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2)=\lambda^2$		
✱La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos x-x$ n'a pas de limite en $+\infty$		
✱Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty} fog(x)=3$		
✱La fonction $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongable par continuité en 0		
✱L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé		
✱L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert		
✱L'image de l'intervalle $[1,2]$ par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-1$ est $[0,3]$		
✱si f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}^*$, alors f est continue		
✱l'image d'un intervalle par f une fonction discontinue n'est pas un intervalle		
✱il existe une fonction continue et strictement croissante de $[-1,1[$ vers $]-1,1]$		
✱ il existe une fonction continue et strictement décroissante de $[-1,1[$ vers $]-1,1]$		
✱ l'équation $x^3+x=1$ admet une unique solution dans $]0,1[$		
✱soient $a\in\mathbb{R}$, et f la fonction définie par $f(x)=x^5-7x+a$,alors :		
1- f s'annule au plus une fois dans $[-1,1]$		
2- f' s'annule au moins une fois dans $[-1,1]$		
3- si $\lvert a\rvert\succ 6$, f ne s'annule pas dans $[-1,1]$		
4- si $\lvert a\rvert\le 6$, f s'annule exactement une fois dans $[-1,1]$		