Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	Devoir de Synthèse n° 3	Durée : 3 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 16-05-2011	Classe : 4 Info

Exercice n°1 :(4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte. Relever cette réponse.

1) Une primitive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction : $x \mapsto -\tan(x)$ est la fonction :

a) $-ln\left(\frac{1}{sinx}\right)$ b) $-ln\,(sinx)$ c) $-ln\left(\frac{1}{cosx}\right)$

2) On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$. Alors :

a) $nI_n = \frac{1}{(n+1)} - I_{n+1}$ b) $I_n = \frac{1}{(n+1)} - nI_{n+1}$ c) $nI_n = -\frac{1}{(n+1)} + I_{n+1}$

3) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto (x^2+2x)e^x$ sur $\mathbb{R}$ est :

a) $(2x+2)e^x$ b) x^2e^x c) $x^2e^x + x$

4) La fonction f définie par : $f(x) = \frac{ln\,(1+x)}{x^2}$ a pour limite :

a) 0 en $+\infty$ b) 1 en 0^+ c) 0 en 0^+

Exercice n°2 :(6points)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1+{U_n}^2}{2U_n}$.

1) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $1 \le U_n \le 2$.

b) Etudier la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite .

2) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ et $W_n = ln\left(1 - \frac{2}{U_n+1}\right)$.

a) Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $U_n = \frac{1+e^{W_n}}{1-e^{W_n}}$ puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

b) Exprimer en fonction de n le produit $P_n = V_0.V_1 \dots\dots\dots\dots .V_n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

Exercice n°3 : (3 points)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que M est inversible . Déterminer sa matrice inverse M^{-1} .

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) : $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$ par :

a) Un calcul matriciel faisant intervenir M^{-1} .

b) La méthode des déterminants .

Exercice n°4 :(7 points)

1) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0,+\infty[$ une unique solution α .

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. Déterminer le signe de $g(x)$.

c) Démontrer que $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

2) Soit h la fonction définie et dérivable sur $[0,+\infty[$ telle que $h(x) = \frac{4x}{e^x+1}$.

a) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $h'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

b) Déduire les variations de la fonction h sur $[0,+\infty[$.

3) On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{e^x+1}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

a) Etudier f et tracer C_f .

b) Soit $M(x, f(x))$, $P(x,0)$ et $Q(0, f(x))$. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α . Le point M a pour abscisse α . La tangente (T) en M à la courbe (C_f) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$

Bonne chance et excellente réussite au Baccalauréat