



❖❖ EXERCICE 01 ❖❖

Soit $f(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

- 1- Montrer que f admet sur $] -1, +\infty[$ une primitive F .
- 2- Déterminer $F(x)$ sachant que $F(3) = 2$

❖❖ EXERCICE 02 ❖❖

Soit $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x-2)^2}$; $x \in]2, +\infty[$

- 1- Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$
- 2- En déduire la primitive de f qui s'annule en 3

❖❖ EXERCICE 03 ❖❖

Soit $g(x) = \cos(3x) \cdot \sin^3(x)$

- 1- Linéariser $g(x)$
- 2- Déterminer la primitive G de g qui s'annule en 0

❖❖ EXERCICE 04 ❖❖

Soit $h(x) = [1 - 2\sin(x)] \cos(x)$

- 1- Justifier l'existence des primitives de h sur \mathbb{R} .
- 2- Déterminer la primitive H de h qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

❖❖ EXERCICE 05 ❖❖

On considère la fonction f définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

- 1- Etudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 2- Soit g la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$
 - a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ vers un intervalle I que l'on déterminera.

- b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur I et calculer $(g^{-1})'(x)$ lorsqu'il existe.
 c) Déterminer une primitive F de la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad ; \quad x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$$

❖❖ EXERCICE 06 ❖❖

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$

par $g(x) = \tan^2(x)$, on désigne par F la primitive de f qui s'annule en 0.

- 1- Calculer $F \circ g(0)$
- 2- Montrer que $F \circ g$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ et déterminer $(F \circ g)'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$
- 3- En déduire l'expression de $(F \circ g)(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$
- 4- Calculer $F(1)$

❖❖ EXERCICE 07 ❖❖

Soit $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in [0, +\infty[$

- 1- Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive G de g qui s'annule en 0
- 2- Soit $H(x) = G[\tan(x)]$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$
 - a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ et déterminer $H'(x)$
 - b) En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$, on a : $H(x) = x$. Calculer $G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- 3- On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $H(x) = G\left(\frac{1}{1+x}\right) + G\left(\frac{x}{x+2}\right)$
 - a) Montrer que H est dérivable sur \mathbb{R}_+ et déterminer $H'(x)$.
 - b) En déduire que $G\left(\frac{1}{2}\right) + G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

❖❖ EXERCICE 08 ❖❖

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x) = \frac{-2}{x^2 - 2x + 2}$ et F sa primitive sur $]-\infty, 1]$ qui s'annule en 1.

1- On désigne par G la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $G(x) = F\left[1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \pi[$ et calculer $G'(x)$.

b) Déterminer $G(x)$ pour tout $x \in [0, \pi[$ puis calculer $F(0)$

2- Soit H la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $H(x) = F(x) + F\left(\frac{x}{x-1}\right)$

a) Montrer que H est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et calculer $H'(x)$

b) En déduire que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a : $F\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi - F(x)$

3- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} F\left(\frac{1}{k}\right)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{n, n+1, n+2, \dots, 2n\}$, on a :

$$F\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{k}\right) \leq F\left(\frac{1}{2n}\right)$$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Faleh