Limites :

* Soient f et g deux fonctions polynômes de degré respectives n et m

(i.e : $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x^1+a_0$ et

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_1x^1+b_0$) , on a :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_nx^n)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(b_mx^m)$ si de plus $g(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\right)$$

* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2}$; $a\in\mathbb{R}$

Théorèmes :

Soient f, g et h trois fonctions tel que :

$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ pour x voisin de x_0 (x_0 fini ou infini).

*Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$; ($l\in\mathbb{R}$) alors $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$

* Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=+\infty$

* Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=-\infty$

Limite d'une fonction composée :

Soient f et g deux fonctions tels que

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; (x_0, a et b finis ou infini) alors $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=b$

Fonction continue :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0\in I$.

Continuité en un réel :

Définition : f est continue en x_0 si pour tout réel $\beta>0$, il existe un réel $\alpha>0$ tel que :

si ($x\in I$ et $|x-x_0|<\alpha$) alors $|f(x)-f(x_0)|<\beta$.

Conséquences :

➢ Toute fonction constante est continue en tout réel x_0.

➢ Toute fonction linéaire est continue en tout réel x_0.

➢ Toute fonction polynôme est continue en tout réel x_0.

➢ Toute fonction rationnelle est continue en tout réel x_0 de son domaine de définition.

➢ La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue en tout réel x_0 positif.

➢ Si une fonction f est continue en x_0 alors $|f|$ est continue en x_0

➢ Soit f une fonction positive sur I

✓ Si f est continue sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Opérations sur les fonctions continues :

Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in I$.

- Si f et g sont continues en x_0 alors $f+g$; fg et $\lambda.f$ sont continues en x_0.
- Si f et g sont continues en x_0 et $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ sont continues en x_0.

Continuité à droite - Continuité à gauche :

- f est continue en x_0^+ (c-à-d à droite en x_0) si pour tout réel $\beta > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : si $(x \in I$ et $0 \leq x - x_0 < \alpha)$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \beta$.
- f est continue en x_0^- (c-à-d à gauche en x_0) si pour tout réel $\beta > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : si $(x \in I$ et $-\alpha < x - x_0 \leq 0)$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \beta$.
- f est continue en x_0 ssi f est continue à droite et à gauche en x_0.
- Soit f une fonction positive sur I
  - ✓ Si f est continue en x_0^+ alors $\sqrt{f}$ est continue en x_0^+.
  - ✓ Si f est continue en x_0^- alors $\sqrt{f}$ est continue en x_0^-.

Continuité sur un intervalle :

- Soient a et b finis ou infinis : Une fonction définie sur $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.
- Soient a finis ou infinis et $b \in \mathbb{R}$: Une fonction définie sur $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à gauche en b.
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et b finis ou infinis : Une fonction définie sur $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a.
- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: Une fonction définie sur $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b.
- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

- Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel $\lambda_0 \in [a,b]$ tel que $f(\lambda_0) = \lambda$.
- Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$ alors il existe au moins un rée l $\lambda_0 \in]a,b[$ tel que $f(\lambda_0) = 0$.
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$ alors il existe un unique réel $\lambda_0 \in]a,b[$ tel que $f(\lambda_0) = 0$.
- Si f est une fonction continue et ne s'annule pas sur $[a,b]$ alors elle garde un signe constant sur $[a,b]$.

❖❖EXERCICE 1❖❖

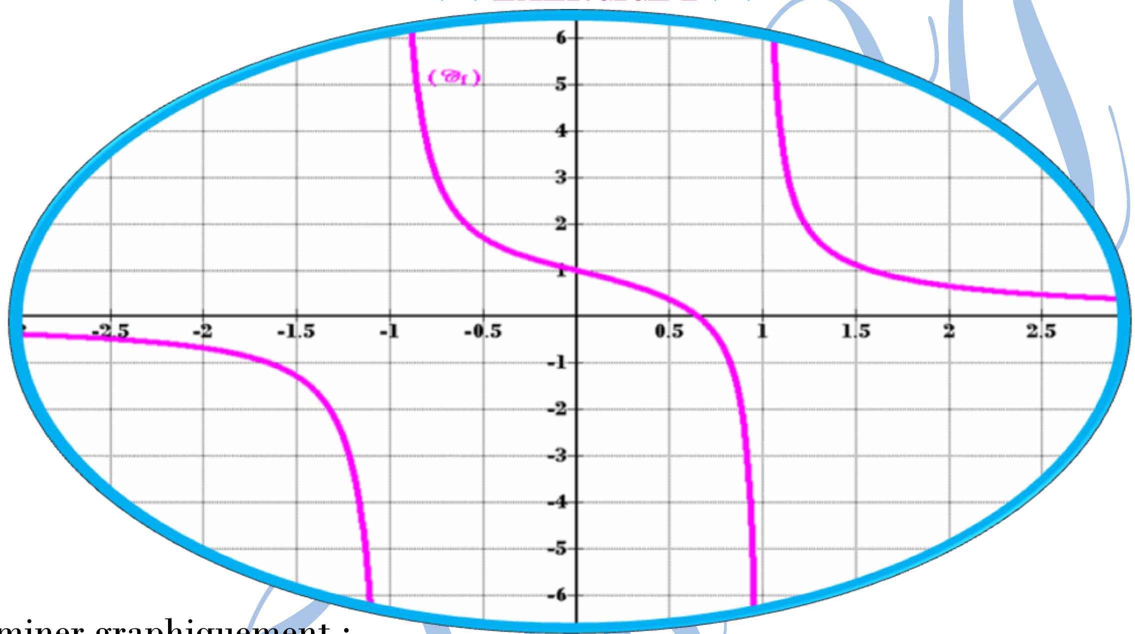
Calculer les limites suivants :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+5x-6}{x-x^2+13}\ ;\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^5+6x^3-2x+1}{x^4-x^2+23x-\sqrt{2}}\ ;\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^3-\sqrt{5}x+4}{x^6-x^2+13}\ ;\ \lim_{x\to(-1)}\frac{x^2+6x+5}{x+1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to2}\frac{|x(x-2)|}{x(x^2-x-2)}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}\ ;\ \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+1}}{x-4}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)-1}{x^2+2x-3}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(x)+\sin(2x)}{\sin(x)-\sin(2x)}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos^2(x)}{2+\cos(x)}$$

❖❖EXERCICE 2❖❖



Déterminer graphiquement :

1- Le domaine de définition de la fonction f .

2- Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

❖❖EXERCICE 3❖❖

Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x\in[-1,+\infty[\setminus\{0\}\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$

Déterminer la valeurs de a pour que f soit continue en 0 .

❖❖EXERCICE 4❖❖

soit $g(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

1- Déterminer D_g .

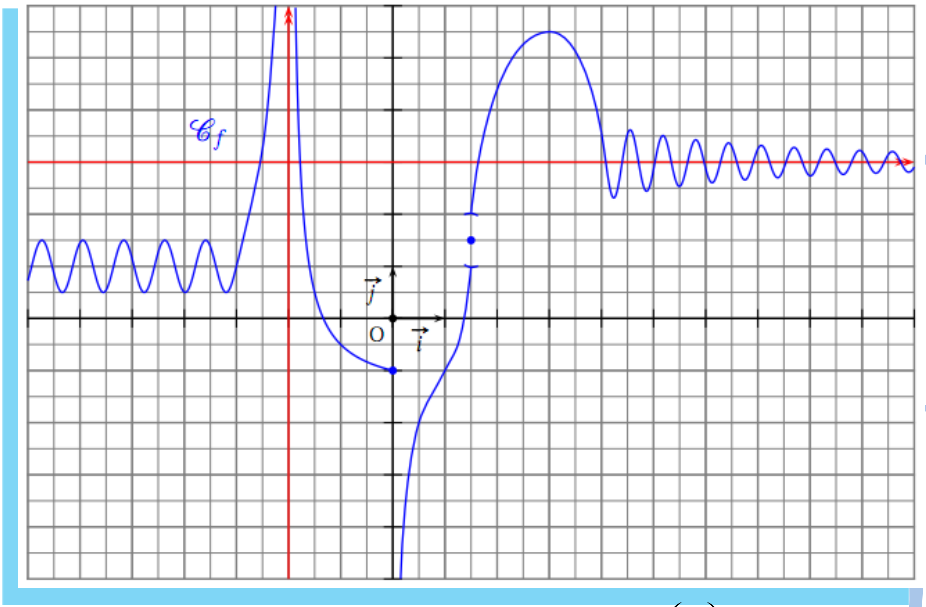
2- Montrer que pour tout $x\in D_g$, on a : $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

3- Montrer que pour tout $x\in D_g\setminus\{0\}$, on a : $0\le g(x)\le\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

4- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

❖❖EXERCICE 5❖❖

La courbe (C_h) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction h dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On suppose que son tracé en dehors de la fenêtre graphique se prolonge en conservant la même allure.



1- Déterminer graphiquement $h(-3)$; $h(3)$; $h(0)$ et $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

2- Déterminer graphiquement D_h .

3- Déterminer $\lim\limits_{x\to(-2)} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

4- La fonction h admet-elle une limite en $-\infty$.

5- a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

c) La fonction déterminer h admet-elle une limite en 0 ?

6- La fonction déterminer h admet-elle une limite en $\dfrac{3}{2}$?

❖❖EXERCICE 6❖❖

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$

1- Déterminer D_f .

2- Montrer que pour tout $x\geq 0$, on a : $4x^2 \leq 4x^2+x+1 \leq (2x+1)^2$

3- En déduire que pour tout $x>0$, on a : $2 \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x}$

4- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

❖❖EXERCICE 7❖❖

Soit $f(x)=x\sqrt{1-x}$

1- Déterminer D_f.

2- Dresser le tableau de variation de f

3- a) Montrer que l'équation $f(x)=-\frac{1}{n}\,;n\in\mathbb{N}^*$ admet dans $]-\infty,1]$ une unique solution U_n.

b) Comparer $f(U_n)$ et $f(U_{n+1})$

c) En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

❖❖EXERCICE 8❖❖

Soient $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+2}-1}{4x^2-1} & \text{si } x\neq-\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{4} & \text{si } x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ et $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1-\cos(2x)} & \text{si } x\in]-\pi,0[\\ \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x+1}-1} & \text{si } x\in]0,\pi[\end{cases}$

1- Déterminer D_f et D_g

2- Etudier la continuité de f en $\left(-\frac{1}{2}\right)$ et la continuité de g en 0.

❖❖EXERCICE 9❖❖

Soit $g(x)=\tan(x)+x-1\quad;\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

1- Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2- Etudier la monotonie de g sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3- Déterminer $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

4- En déduire que l'équation $\tan(x)=1-x$ admet une unique solution $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

❖❖EXERCICE 10❖❖

1- Montrer que l'équation $x^3+3x-5=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

2- Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} prés.

❖❖EXERCICE 11❖❖

Soit $\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1}+2x & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{x^3-5x+4}{4(1-x)} & \text{si } x\in]0,1[\\ \dfrac{x+\cos(\pi x)}{2-\cos(\pi x)} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\psi(x)$

b) Montrer que pour tout $x\ge 1$, on a : $\psi(x)\ge\dfrac{x-1}{3}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)$

2- Etudier la continuité de ψ en 0 et en 1

❖❖EXERCICE 12❖❖

Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f\left(\dfrac{2}{x}\right)\le f\left[1+\cos(x)\right]\le f\left(\dfrac{2+x^2}{1+x^3}\right)$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left[1+\cos(x)\right]$

❖❖EXERCICE 13❖❖

On désigne par E la fonction partie entière.

1- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $E\left(x^2\right)\in\mathbb{N}$

2- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{E\left(x^2\right)}=+\infty$