❖❖EXERCICE 01❖❖

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

❶ $y' = -3y$; ❷ $3y' + y = 0$; ❸ $y'' = -5y$; ❹ $9y' = -5y$; ❺ $8y' - 5y + 2 = 0$

❖❖EXERCICE 02❖❖

Soit $(E): y' + 2y = 0$, où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

2- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$

3- On note u_n la valeur moyenne de f sur $[n, n+1]$; $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

❖❖EXERCICE 03❖❖

Soit $f(x) = (3x+8)e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$

1- Montrer que f est une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2y = 3e^{2x}$

2- En déduire $\int_{0}^{\ln(2)} f(x)dx$

❖❖EXERCICE 04❖❖

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_0): y' = 2y$

2- Soit $(E): y' - 2y = 5\cos(x)$

a) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = \sin(x) - 2\cos(x)$ est une solution de (E)

b) Soit f une fonction.

Montrer f est une solution de $(E) \Leftrightarrow f - g$ est une solution de (E_0)

c) Déterminer alors la solution de (E) qui s'annule en π.

❖❖EXERCICE 05❖❖

1- Résoudre l'équation différentielle $(E_1): y'' + y = 0$

2- On considère l'équation différentielle $(E_2): y'' + \dfrac{1}{x^4}y = 0$

a) Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} = g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Montrer que f est une solution de $(E_1) \Leftrightarrow g$ est une solution de (E_2)

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_2)

3- Calculer $I=\int_{\frac{3}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

❖❖EXERCICE 06❖❖

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$(E_0): y'+y-1=0$ et $(E): y'+\left[1+\tan(x)\right]y-\cos(x)=0$; $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1- Déterminer l'ensemble des solution de (E_0)

2- Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(x)=\cos(x).g(x)$

Montrer que f est une solution de $(E)\Leftrightarrow g$ est une solution de (E_0)

3- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=0$

❖❖EXERCICE 07❖❖

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gl^{-1}) d'une personne ayant absorbé , à jeun , une certaine quantité d'alcool vérifie sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle $(E): y'+y=a\,e^{-t}$, où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1- On pose pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $g(t)=e^t.f(t)$

Montrer que g est une fonction affine

2- Exprimer $f(t)$ en fonction de t et a

3- On suppose que $a=5$

a) i- Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

ii- Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

b) Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0{,}5\ gl^{-1}$

❖❖EXERCICE 08❖❖

On considère l'équation différentielle définie sur $]0,+\infty[$ par :

$(E): xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2$

1- a) Montrer que si f est une solution de (E) alors la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x)=\frac{f(x)}{x}$ est une solution de $(E'): y'-2y=8$

b) Montrer que si h est une solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=x\,h(x)$ est une solution de (E).

2- Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

3- Existe –t-il une fonction f solution de (E) telle que $f\left[\ln(2)\right]=0$.