Problème 1 :

A . Soit $g(x) = ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$

1. Etudier le sens de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$, $\propto \in \left]-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right[$.
3. En déduire le tableau de signe de g(x). Tracer $\mathcal{C}_g$ dans un r .o.n .

B . $\begin{cases} f(x) = xln\left|\frac{x+1}{x}\right| & si\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ et déterminer le signe de $f'(x)$.
3. Montrer que $f(\propto) = 1 - \frac{1}{\propto+1}$ et que $f(\propto) \in \left]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right[$.
4. Dresser le tableau de variation de f
5. a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   b) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ: $y = x$. Construire $\mathcal{C}_f$.
6. soit h la restriction de f à $\mathbb{R}_+$
   a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}.
   b) Tracer la courbe représentative de h^{-1}.

C . $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x + 1) - \frac{1}{2}x^2 lnx + \frac{1}{2}x & si\ x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que F est dérivable à droite en 0.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer F'(x).
3. En déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 2 :

A Soit $g(x) = \frac{1}{2}(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}\ )$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de g.
3. a) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote oblique Δ.
   b) Etudier la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à Δ.
   c) Tracer $\mathcal{C}_g$.

B Soit $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$

1. a) Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$.
   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
   c) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un r .o.n.
2. a) Montrer que f admet sur $\mathbb{R}_+$ une fonction réciproque f^{-1}.
   b) Expliciter $f^{-1}(x)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique $\propto$, $\propto \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$
4. Tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

C

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

www.devoir@t.net © 2011

b) En déduire $\lim_{x\to 0^+} \frac{(x^2+2x+2)\ln(x+1)-x^2-2x}{x^2}$

2. Soit $F(x) = (x+2)f(x) - \sqrt{x^2+4x}$

   a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer F'(x).

   b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Problème 3 :

n désigne un entier naturel non nul.

A Soit g_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} lnx$

1. Etudier les variations de g_n.
2. a) En déduire l'existance d'un unique réel $\propto_n \in]0,+\infty[$ tel que $g_n(\propto_n) = 0$.

   b) Montrer que $1 \leq \propto_n < e^2$. Vérifier que $\propto_1 = 1$.

   c) Montrer que $\ln \propto_n = 2 - \frac{2}{n} \propto_n$. Exprimer $g_{n+1}(\propto_n)$ en fonction de $\propto_n$ et n. En déduire que la suite $(\propto_n)$ est convergente.

   d) Calculer $\lim_{n\to\infty} \propto_n$.

B Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x - lnx}{2\sqrt{x}}$. On désigne par $(\mathcal{C}\ \ )$ la courbe de f et $(\mathcal{C}_0)$ la courbe de $x \longmapsto \sqrt{x}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. Calculer f'(x). vérifier que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$. Dresser le tableau de variation de f.
3. Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \sqrt{x})$. Que-peut-on déduire pour $(\mathcal{C}\ \ )$. Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C}\ \ )$ *et* $(\mathcal{C}_0)$. construire $(\mathcal{C}\ \ )$ *et* $(\mathcal{C}_0)$

C Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt{x}\ln x$

1. Montrer que F est une primitives de f sur $]0,+\infty[$.
2. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

   a) soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n+1$. Montrer que :

$$\forall x \in \left[1 + \frac{k}{n}, 1 + \frac{k+1}{n}\right] \qquad f(1 + \frac{k}{n}) \leq f(x) \leq f(1 + \frac{k+1}{n})$$

   En déduire que $\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq F\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) - F\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

   b) Montrer que $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq F(2) - F(1) \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$

   En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

www.devoir@t.net © 2011